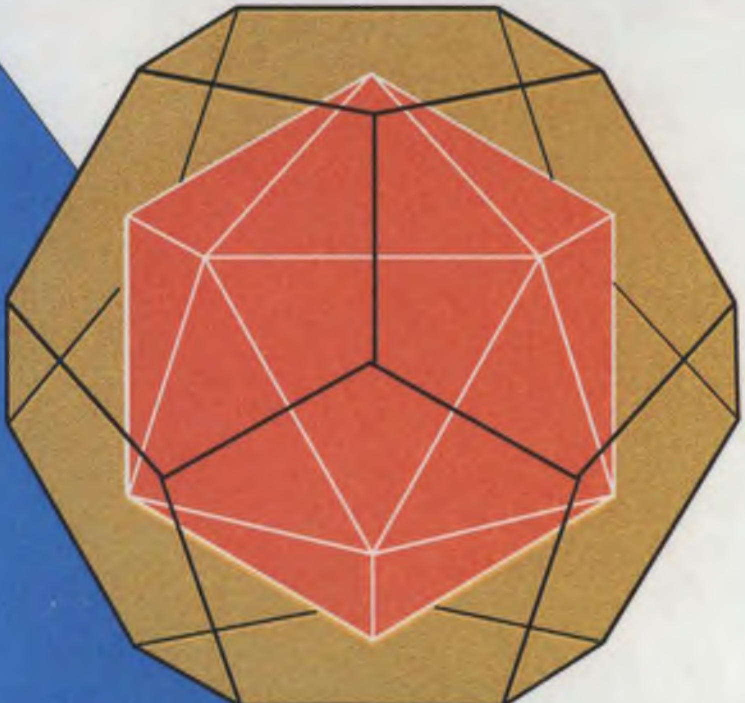
А.Д.Александров А.Л. Вернер В.И.Рыжик



10

ГЕОМЕТРИЯ

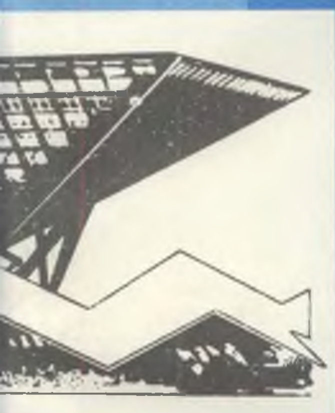
Просвещение

Окружа

М

– эт

геом



щий нас

р

мир

трии

А.Д.АЛЕКСАНДРОВ
А.Л.ВЕРНЕР В.И.РЫЖИК

ГЕОМЕТРИЯ

**учебник для 10 класса
с углубленным изучением
математики**

*Рекомендовано
Министерством общего
и профессионального образования
Российской Федерации*

МОСКВА «ПРОСВЕЩЕНИЕ» 1999

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151я72
А46

Александров А. Д. и др.

А46 Геометрия: Учеб. для учащихся 10 кл. с углубл. изуч. математики/А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик.— М.: Просвещение, 1999.— 238 с.: ил.— ISBN 5-09-008530-7.

Этот учебник — переработанный вариант учебника А. Д. Александрова, А. Л. Вернера, В. И. Рыжика «Геометрия, 10—11» для углубленного изучения математики (М.: Просвещение, 1988—1995).

В результате переработки учебник представлен двумя книгами: «Геометрия, 10» и «Геометрия, 11», в которых последовательность и большей частью содержание глав сохранены. Изменения коснулись в основном задачного материала: смысловой единицей в этом варианте полагается весь параграф, а не его пункт, что и определило структуру задач в этом издании. (Для лучшей ориентировки в номере каждой задачи указано в скобках, к какому пункту параграфа она отнесена.) Все задачи распределены по рубрикам: «Дополняем теорию», «Доказываем», «Исследуем», «Рассуждаем», «Планируем», «Разбираемся в решении», «Участвуем в олимпиаде» и др. В них оптимально отражены все три составляющие геометрии: логика, наглядное воображение и практика.

ISBN 5-09-008530-7

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151я72

Оглавление

Глава II
ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ И ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ

Введение

I. О стереометрии

В предыдущих классах мы изучали главным образом геометрию на плоскости — планиметрию, а теперь будем заниматься геометрией в пространстве. Ее называют стереометрией (от греческих слов «стереос» — телесный, пространственный, «метрео» — измеряю).

Обращаясь к геометрии в пространстве — к стереометрии, будем предполагать, что геометрия на плоскости — планиметрия — нам известна.

Каждый представляет наглядно плоскость или по крайней мере конечный кусок плоскости, например плоскость стола, доски и т. п. В планиметрии плоскость рассматривается сама по себе, независимо от окружающего пространства. Однако, занимаясь геометрией на плоскости, мы все же помним, что плоскость расположена в пространстве и что в нем много плоскостей. На каждой из них выполняется планиметрия.

Таким образом, в стереометрии плоскость — это фигура, на которой выполняется планиметрия, т. е. справедливы аксиомы планиметрии, а вместе с ними и их следствия — теоремы планиметрии. Можно не помнить всех аксиом планиметрии, надо только понимать, что плоскость — это фигура, в которой есть точки, прямые, отрезки, углы с их основными свойствами, а за ними и другие известные фигуры: треугольники, окружности и т. д. Свойствами этих плоских фигур, теоремами о них, доказанными в планиметрии, мы постоянно будем пользоваться.

При этом надо иметь в виду, что хотя в основу планиметрии могут быть положены различные системы аксиом (подробнее об этом сказано в § 6) и само построение планиметрии допускает различные пути, но в результате, несмотря на все эти различия, в планиметрии изучают одни и те же геометрические фигуры и получают одни и те же их свойства, выраженные в теоремах и аксиомах: теорема Пифагора и теорема о сумме углов треугольника, признаки равенства треугольников и свойства движений, операции с векторами и теорема о площади круга и т. д.

Важнейшими объектами стереометрии являются пространственные фигуры, не лежащие ни в какой плоскости: например, шар, сфера, куб, параллелепипед, призма, пирамида (рис. 1). Конечно, все они знакомы вам, но, чтобы изучить их свойства, необходимо сначала рассмотреть взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве (главы I—III). Однако в задачах первых глав мы будем рассматривать многогранники. Сейчас мы перечислим некоторые из них и дадим их описание.

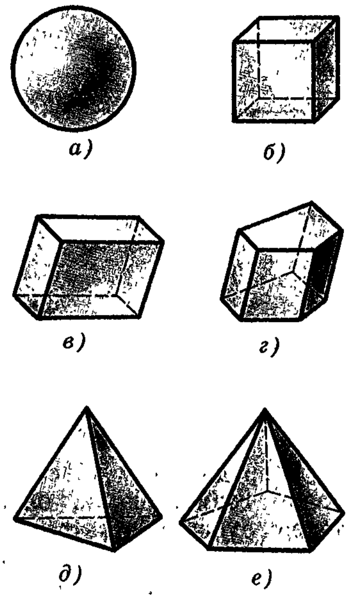


Рис. 1

Куб — это многогранник, у которого шесть граней и все они квадраты (рис. 1, *б*).

Параллелепипед — это многогранник, у которого шесть граней и все они параллелограммы (рис. 1, *в*). Вы уже знакомы с начальных классов с **прямоугольным параллелепипедом**, у которого все грани — прямоугольники.

n-угольная призма — это многогранник с $n+2$ гранями, из которых две, называемые **основаниями**,— равные n-угольники, а остальные n граней — параллелограммы, они называются **боковыми гранями призмы** (рис, 1, *г*). При этом любая боковая грань имеет с каждым из двух оснований по одной общей стороне.

Таким образом, *параллелепипед — это призма, в основании которой — параллелограмм.*

Правильная n-угольная призма — это такая призма, у которой все боковые грани — прямоугольники, а каждое основание — правильный n-угольник.

Пирамидой называется многогранник, у которого одна грань — какой-либо многоугольник, а остальные грани — треугольники с общей вершиной (рис. 1, *д*, *е*). Первая грань называется **основанием пирамиды**, остальные — **боковыми гранями**; их общая вершина называется **вершиной пирамиды**. Стороны граней пирамиды называются ее **ребрами**, причем ребра, сходящиеся в вершине, называются **боковыми**. Если основание пирамиды n-угольник, то она называется **n-угольной**. Простейшей среди всех

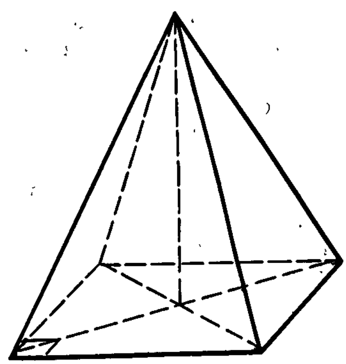


Рис. 2

пирамид (и даже среди многогранников) является треугольная пирамида, которую называют также **тетраэдром,** т. е. четырехгранником (рис. 1, *д*). У тетраэдра четыре грани, и все они треугольники.

Пирамида называется **правильной,** если ее основание — правильный многоугольник, а все боковые ребра равны (рис. 2). Египетские пирамиды — правильные четырехугольные (рис. 3).

Рис. 3

Тетраэдр называется правильным, если все его грани — правильные треугольники (т. е. все его ребра равны). Правильный тетраэдр — это частный случай правильной треугольной пирамиды.

Большинство формулируемых нами утверждений и доказательств иллюстрируется рисунками. Отличие этих рисунков от тех, которыми иллюстрировался курс планиметрии, в том, что здесь мы на плоскости рисунка (в книге, в тетради, на доске) изображаем не только плоские, но и неплоские фигуры. Основные правила и приемы таких изображений известны из школьного курса черчения и будут обоснованы в курсе стереометрии. Сейчас мы перечислим три самые простые из них.

1. *Плоскости на рисунках изображают в виде параллелограмма* (рис. 4, *а*), *а иногда в виде произвольной области* (рис. 4, *б*).

2. *Параллельные прямые (отрезки) на рисунках изображаются параллельными отрезками.*

3. *Середина отрезка изображается как середина его изображения.*

Эти правила должны соблюдаться, например, при изображении многогранников (в частности, куба и параллелепипеда).

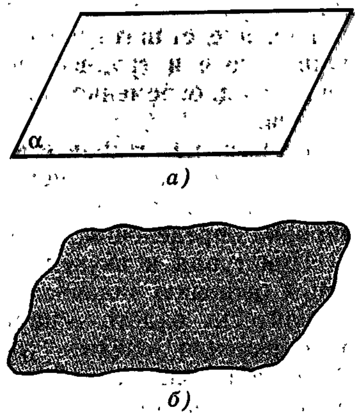


Рис. 4

II. Про геометрию

Каждый человек имеет наглядное понятие о пространстве, о телах, о фигурах. Но в геометрии свойства фигур изучаются в отвлеченном (абстрактном) виде и с логической строгостью.

Своеобразие геометрии, выделяющее ее среди других разделов математики, да и всех наук вообще, и заключается в неразрывном органическом соединении живого воображения со строгой логикой. Геометрия в своей сути и есть пространственное воображение, пронизанное и организованное строгой логикой.

Во всяком подлинно геометрическом предложении, будь то аксиома, теорема или определение, неразрывно присутствуют эти два элемента: наглядная картина и строгая формулировка, строгий логический вывод. Там, где нет одной из этих двух сторон, нет и подлинной геометрии.

Наглядность, воображение принадлежат больше искусству, строгая логика — привилегия науки. Сухость точного вывода и живость наглядной картины — «лед и пламень не столь различны меж собой». Так геометрия соединяет в себе эти две противоположности. Так ее и надо изучать, соединяя живость воображения с логикой, наглядные картины со строгими формулировками и доказательствами.

Поэтому основное правило состоит в том, что, встречаясь с определением, теоремой или задачей, нужно прежде всего представить и понять их содержание: представить наглядно, нарисовать или, еще лучше, хотя и труднее, вообразить то, о чем идет речь, и одновременно понять, как это точно выражается.

Ничего не старайтесь заучить, не нарисовав, не вообразив того, о чем идет речь, не поняв, как это наглядное представление выражается в формулировке определения, теоремы или задачи.

Приступая к изучению доказательства теоремы или к решению задачи, следуйте такому принципу: старайтесь видеть — нарисовать, сообразить — и одновременно следить за логикой рассуждения; карандаш должен набрасывать или аккуратно рисовать соответствующие картинки и тут же выписывать кратко в словах и формулах основные этапы рассуждения.

Геометрия возникла из практических задач, ее предложения выражают реальные факты и находят многочисленные применения. В конечном счете в основе всей техники так или иначе лежит геометрия, потому что она появляется всюду, где нужна хотя бы малейшая точность в определении формы и размеров. И технику, и инженеру, и квалифицированному рабочему геометрическое воображение необходимо, как геометру или архитектору.

При всем реальном значении геометрии каждому понятно, что ни в природе, ни в технике нет ни отрезков без всякой ширины, ни бесконечных прямых, ни точек без всяких размеров. Идеальные геометрические фигуры существуют только в нашем представлении.

Как же сложилось такое представление и зачем оно нужно?

Путь формирования геометрических представлений и понятий был очень долгим. Он длился тысячелетия и не завершен. Понятия геометрии продолжают изменяться. Проследить даже в общих чертах этот путь здесь мы не можем. Сделаем только самые общие пояснения.

Можно указать две основные причины того, что сложились и утвердились идеальные геометрические представления.

Первую причину легко понять из примера проведения отрезка. Землемеры в Древнем Египте втыкали в землю два колышка и протягивали между ними веревку. Но колышки можно взять потоньше, а вместо веревки — тонкую нить. И не видно, почему нельзя уточнять это дальше.

Таким образом, первая причина состоит в том, что практика и наглядное представление всегда показывали и показывают возможность сделать формы тел и геометрическое построение более точными. Так, представляя себе продолжение отрезка прямой, мы не видим принципиальных ему границ, и возникает представление о неограниченно продолженной прямой.

Неточности связаны с особенностями материала реальных тел, с теми или иными условиями. Но все это является посторонним и случайным по отношению к существу самих геометрических построений. Поэтому эти построения выступают в принципе как неограниченно уточняемые, так же как форма и размеры тела представляются в принципе неограниченно уточняемыми.

Отсюда и возникает представление об идеальных геометрических фигурах. Рассматривается, скажем, треугольник не деревянный, не железный, никакой другой, а треугольник вообще и, значит, идеальный треугольник.

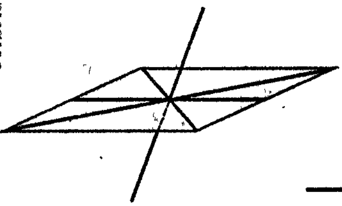
Вторая причина того, что это представление сложилось и утвердилось, тесно связанная с первой, заключается в том, что точное рассуждение требует идеально точно определенного предмета. Для того чтобы делать выводы, чтобы решать практические задачи, нужны четкие правила. А точные правила требуют точных понятий, тем более точных понятий требует точная теория. В этом вторая причина утверждения идеальных понятий геометрии. Продолжающееся и теперь уточнение геометрических понятий неразрывно связано с уточнением математических рассуждений — определений и доказательств. А точная теория нужна в конечном счете для применения в науке и технике, так же как в точной работе нужен хороший точный инструмент.

Математика, в частности геометрия, и представляет собой могущественный инструмент познания природы и создания техники.

Подведем итог. Идеальные геометрические понятия возникают в результате отвлечения от всего внешнего и случайного для самих пространственных отношений и форм. Это отвлечение закрепляется в выводах геометрии, которой нужна прочная логическая структура, как нужна прочная структура хорошей машине.

Наука, поднимаясь к абстракциям, не удаляется от истины, а приближается к ней, проникая в природу точнее и глубже.

Глава I



Основания стереометрии

«Геометрия за то и прославляется, что, заимствовав извне столь мало основных положений, она столь много достигает»,— написал великий ученый Исаак Ньютон (1643—1727) в предисловии к своему главному сочинению «Математические начала натуральной философии». Ясно, что он имел в виду аксиоматический (дедуктивный) метод, идущий от «Начал» Евклида.

Именно так, дедуктивно, опираясь на немногие аксиомы, сформулированные в § 1, начнем мы построение стереометрии в этой главе. Первые, самые простые следствия из принятых нами аксиом стереометрии мы получим в § 2 и § 3. Эти следствия очень важны, и их часто принимают за аксиомы. Как и аксиомы, их, естественно, тоже можно отнести к основаниям стереометрии. Сами по себе они достаточно очевидны. Доказательства их даются как пример строгого вывода из аксиом со всеми необходимыми ссылками на аксиомы и предыдущие теоремы.

Это учит обоснованию выводов. Когда на ваши утверждения вам задают вопрос: «Откуда это следует?» — на него нужно уметь ответить. Это нужно не только в геометрии, но не меньше и в жизни: приучаться обосновывать выводы.

Но, как уже говорилось, геометрия соединяет в себе строгую логику с наглядностью. Поэтому все свои логические рассуждения мы всегда будем иллюстрировать рисунками. О том, как рисовать пространственные фигуры, рассказано в § 4.

А в двух последних параграфах этой главы — § 5 «Существование и единственность. Построения» и § 6 «Об аксиомах» — мы даем логический анализ структуры и содержания первых предложений стереометрии, содержащихся в § 1—3, объясняем, как в стереометрии надо понимать слова «построить», «провести» и т. п. Теорем в этих параграфах нет, но в них есть та математика, о которой М. В. Ломоносов сказал, что «она ум в порядок приводит».

Вот эти вопросы мы и включили в главу «Основания стереометрии».

§ 1. Аксиомы стереометрии

1.1. Аксиома плоскости

Изучение стереометрии начнем с формулировки ее аксиом — тех ее утверждений, которые принимаются без доказательства. Исходя из них, получим выводы стереометрии путем логических рассуждений.

Как уже сказано, геометрию на плоскости — планиметрию — будем считать известной. Поэтому в стереометрии примем как определение:

плоскостями называются фигуры, на которых выполняется планиметрия и для которых верны аксиомы стереометрии.

Можно представить себе плоскость (точнее, ее часть) как поверхность стола, стены, ровной площадки на земле.

Все фигуры, лежащие в плоскости, называются в стереометрии так же, как они назывались в планиметрии: прямые, отрезки, треугольники, окружности и т. д. Простейшими фигурами в пространстве (как и на плоскости) являются точки. Как и в планиметрии, точки обозначают большими буквами латинского алфавита: A, B, C, ... Плоскости обычно обозначают малыми буквами греческого алфавита: α, β, γ, ...

Аксиома 1 *(аксиома плоскости).*

В пространстве существуют плоскости. Через каждые три точки пространства проходит плоскость (рис. 5).

Вторую часть аксиомы плоскости можно выразить еще и так: *через каждые три точки можно провести плоскость* — или так: *любые три точки лежат в одной плоскости.*

Обратите внимание, что в аксиоме 1 говорится *«существуют плоскости»*, т. е. что *плоскостей в пространстве больше одной.*

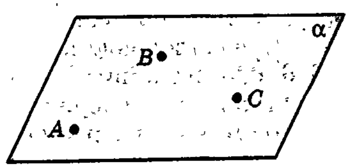


Рис. 5

Может возникнуть вопрос: зачем оговаривать в аксиоме, что в пространстве есть плоскости? Ведь тут же говорится, что через каждые три точки проходит плоскость, а значит, есть плоскости. Но плоскость существует только в том случае, если в пространстве есть три точки. Поэтому можно не оговаривать существование плоскости, если потребовать, чтобы в пространстве существовали по крайней мере три точки. А чтобы плоскостей было больше одной, надо уже требовать, чтобы существовали по крайней мере четыре точки, не лежащие в одной плоскости.

Из аксиомы плоскости вытекает, что *множество точек пространства бесконечно* (так как в пространстве есть плоскости, а на каждой плоскости, как известно из планиметрии, множество точек бесконечно).

Далее, из аксиомы 1 следует, что *плоскость проходит не только через каждые три точки, но и через каждые одну или две точки.* Действительно, взяв, например, любые две точки, можно добавить к ним еще одну точку (ее можно взять из плоскости, существующей согласно аксиоме 1) и провести через них плоскость.

Поскольку в пространстве через каждые две точки проходит плоскость, а в плоскости через каждые две точки проходит прямая, то *в пространстве через каждые две точки проходит прямая.*

О точке или прямой, содержащейся в плоскости α, говорят, что она лежит на этой плоскости или что плоскость α проходит через данную точку или прямую.

Прямые обозначают малыми латинскими буквами: a, b, c, ...

1.2. Аксиомы о прямой

Аксиома 2 *(аксиома пересечения плоскостей).*

Если две плоскости имеют общую точку, то их пересечение есть их общая прямая (рис. 6).

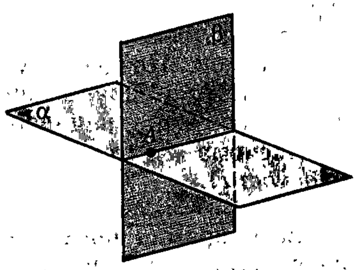


Рис. 6

Например, пересечение двух стен или стены и потолка и т. п. (хотя в большинстве случаев встречаемся с пересечением полуплоскостей по их общей, ограничивающей их прямой, в данном случае это — ребро угла комнаты).

Пояснение. То, что пересечение двух плоскостей α и β есть их общая прямая, означает, что она является прямой как на одной, так и на другой плоскости и кратчайший путь между двумя их общими точками A и B на плоскости α такой же, как на β.

Для других поверхностей это может быть совсем не так. Например, кратчайший путь от A до B (рис. 7) на поверхности β идет по дуге AB, а на плоскости α — по отрезку AB, а не по дуге AB, общей для α и β.

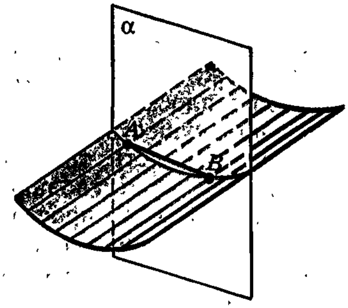


Рис. 7

Кроме того, в аксиоме 2 говорится, что у этих плоскостей нет общих точек вне их общей прямой.

Определение.

Две плоскости, имеющие общую точку (и тем самым общую прямую), называются пересекающимися плоскостями.

Из аксиом 1 и 2 следует, что для каждой плоскости α в пространстве существуют точки, не лежащие на α. Действительно, по аксиоме 1 в пространстве существует еще хотя бы одна плоскость β, отличная от α. Если α и β не имеют общей точки, то каждая точка плоскости β не лежит на α. Если же α и β имеют общую точку, то они пересекаются по прямой (по аксиоме 2). Тогда любая точка плоскости β, не лежащая на этой прямой, не лежит на плоскости α.

В аксиоме 2 говорится о пересечении в пространстве двух плоскостей. Используя эту аксиому, находят пересечения плоскостей с многогранниками — **сечения многогранников.**

Вообще **сечением фигуры** F плоскостью α (в случае, когда F и α имеют общую точку) называется фигура, состоящая из общих точек фигуры F и плоскости α.

Строить сечения многогранников начнем с первых уроков. Позднее будут рассмотрены сечения плоскостями и других пространственных фигур — шаров, конусов, цилиндров.

Аксиома 3 *(аксиома принадлежности прямой плоскости).*

Если прямая проходит через две точки данной плоскости, то она лежит в этой плоскости.

Другими словами, *если две точки данной прямой принадлежат данной плоскости, то прямая содержится в этой плоскости* (рис. 8).

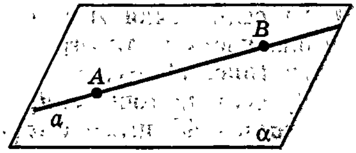


Рис. 8

Из этой аксиомы следует, что *если прямая не лежит в данной плоскости, то она имеет с ней не более одной общей точки.*

Определение.

Прямая и плоскость, имеющие единственную общую точку, называются пересекающимися.

Замечание. Свойством плоскости, выраженным в аксиоме 3, пользуются на практике. Когда надо проверить, является ли данная поверхность плоской, к ней прикладывают несколько раз линейку в разных направлениях. Край линейки, прикасаясь к плоской поверхности в двух точках, должен целиком лечь на нее.

1.3. Аксиома разбиения пространства плоскостью

Вспомним, что каждая прямая, лежащая в данной плоскости, делит ее на две полуплоскости, для которых она служит общей границей (рис. 9). Полуплоскость, ограниченная прямой a, характеризуется следующими свойствами:

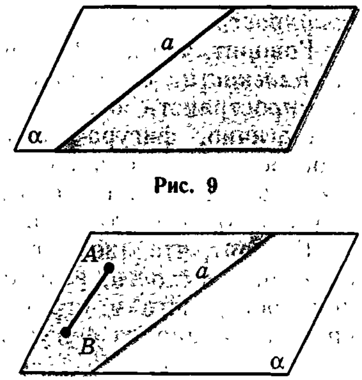


Рис. 9

1) она содержит прямую a, но не совпадает с ней;

2) если точки A, B принадлежат полуплоскости, но не прямой a, то отрезок AB не имеет с a общих точек (рис. 10, *а*);

3) если же точка A принадлежит полуплоскости, а B нет, то отрезок AB имеет с прямой a общую точку (рис. 10, *б*)

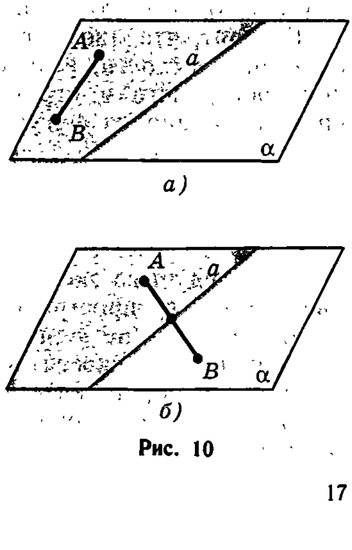


Рис. 10

Аналогично в пространстве определяется полупространство как часть пространства, ограниченная плоскостью (и содержащая саму эту плоскость). Точнее же полупространство можно определить так:

Определение.

Полупространством, ограниченным плоскостью α, называется фигура со следующими свойствами:

1) она содержит плоскость α, но не совпадает с ней;

2) если точки A и B принадлежат фигуре, но не плоскости α, то отрезок AB не имеет с α общих точек (рис. 11, *а*);

3) если же точка A принадлежит фигуре, а B нет, то отрезок AB имеет с α общую точку (рис. 11, *б*).

Плоскость, ограничивающую полупространство, называют также его **границей.**

Аксиома 4 (*аксиома разбиения пространства плоскостью*).

Каждая плоскость разбивает пространство на два полупространства.

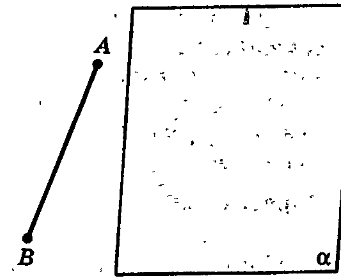
Иначе говоря, *для каждой плоскости α существуют ровно два полупространства, ограниченные плоскостью α, она служит их общей границей, и их объединение составляет все пространство.*

Полупространство по определению не сводится к граничной плоскости, т. е. в нем есть точки, не принадлежащие ей. Значит, *для всякой плоскости в пространстве есть точки вне ее.*

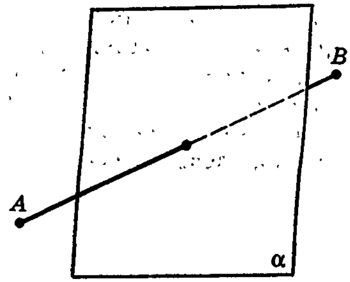
О точках полупространства, которые не лежат на его границе, говорят, что они лежат *внутри полупространства.*

Говорят, что две фигуры лежат *по одну сторону от плоскости,* если они принадлежат одному из полупространств, ограниченных данной плоскостью. Аналогично, фигура лежит по одну сторону от плоскости, если она содержится в одном из полупространств, ограниченных данной плоскостью, и имеет точки внутри его.

Говорят, что две фигуры лежат *по разные стороны от плоскости,* если они принадлежат разным полупространствам, ограниченным этой плоскостью, причем каждая из фигур имеет точки внутри этих полупространств.



а)



б)

Рис. 11

1.4. Аксиома расстояния

Как следует из аксиомы плоскости, через каждые две точки в пространстве проходит плоскость. Ясно, что она не одна (это доказано в п. 2.3). На каждой плоскости выполняется планиметрия. Следовательно, на каждой плоскости любым двум ее точкам соответствует положительная величина — **расстояние между точками** на этой плоскости, т. е. **длина** соединяющего их **отрезка.** Хотя две точки принадлежат одновременно разным плоскостям, расстояние между ними на каждой из этих плоскостей будет одно и то же. Это и выразим как аксиому.

Аксиома 5 *(аксиома расстояния).*

Расстояние между любыми двумя точками пространства не зависит от того, на какой плоскости, содержащей эти точки, оно измерено.

Расстояние между точками A и B будем обозначать так же, как отрезок,— AB, либо, когда важно подчеркнуть, что речь идет не об отрезке, а о его длине, так: $|AB|$.

После того как выбран единичный отрезок, длина каждого отрезка выражается положительным числом. К этому числу приписывают название единичного отрезка: 3 см, 2,5 км и т. д. Если единичный отрезок не имеет названия, а длина отрезка равна, например, 7 единицам длины, то пишем $AB=7$, что является сокращением записи $AB = 7$ ед.

Аксиома расстояния позволяет сравнивать фигуры на разных плоскостях, в частности применять теоремы о равенстве и подобии треугольников, расположенных в разных плоскостях.

Пользуясь понятием расстояния, можно определить равенство и подобие фигур в пространстве буквально так же, как это было сделано в планиметрии. А именно: две фигуры называются **равными,** если существует соответствие между их точками, при котором расстояния между парами соответствующих точек равны.

Далее, фигура F_1 называется **подобной фигуре** F **с коэффициентом** $k>0$, если каждой точке фигуры F можно поставить в соответствие точку фигуры F_1 так, что для каждых двух точек X и Y фигуры F и соответствующих им точек X_1 и Y_1 фигуры F_1 имеет место равенство $X_1Y_1=kXY$. Число k называется **коэффициентом подобия.**

Очевидно, если $k=1$, то F_1 и F равны, т. е. *равенство есть частный случай подобия.*

Замечание *(о равенстве фигур в практике).* Примеров вокруг нас, иллюстрирующих понятие «равные фигуры», более чем достаточно, только эти реальные предметы мы называем не равными, а одинаковыми: одинаковые столы и стулья в классе, одинаковые кирпичи, из которых сложены здания, и сами здания могут быть одинаковыми, если построены по одинаковым проектам. Вся современная промышленность с ее массовым производством основана на изготовлении больших серий одинаковых предметов: штамповка деталей, конвейерная сборка машин, серийное строительство зданий, огромные тиражи одинаковых книг, газет, журналов и т. п. И очень важно, чтобы в каждой такой серии предметы были бы равными, одинаковыми. Только при этом условии можно, например, заменять в машинах, станках испорченные детали такими же, равными деталями. Можно условно сказать, что замена в конструкции какой-нибудь детали другой такой же деталью и есть отображение, устанавливающее их равенство.

Проверяя, равны ли друг другу реальные предметы (например, какие-нибудь детали), их сравнивают со стандартом, измеряя у этих предметов лишь несколько их основных размеров. Так и о равенстве двух геометрических фигур определенной формы тоже можно судить, зная, что у них равны расстояния лишь для некоторого конечного множества пар соответствующих точек. Например, для двух треугольников достаточно проверить равенство длин их соответствующих сторон.

Дополнение к параграфу 1

О величинах

В п. 1.4 сказано, что расстояние между точками — это **величина** (точнее было бы сказать — **скалярная величина**, так как бывают и векторные величины — о них пойдет речь в главе VIII). Что же такое величина? На этот вопрос кратко можно ответить так: *величина — это то, что можно измерить*. Или более подробно: *величина — это такое свойство предмета или явления, которое может быть в каком-то смысле больше или меньше и которое можно точно оценить.*

Точная оценка величины называется ее **измерением.** Измерение происходит в результате процесса сравнения величины с некоторой величиной того же рода, принятой за единицу. Процесс сравнения зависит от рода рассматриваемых величин: для расстояний он один, для объемов —

другой, для масс — третий и т. д. В результате измерения величина получает определенное **численное значение** при данной единице измерения.

Величины играют большую роль в науке, особенно в физике. Почти все законы физики выражают связи между теми или иными величинами. Сила, масса, скорость, температура и т. д. — вот примеры физических величин.

Геометрические величины — это свойства геометрических фигур, характеризующие их форму и размеры; это длина, площадь, объем, величина угла.

Длины, площади, объемы — все это примеры неотрицательных скалярных величин. Скалярные величины вполне определяются своими численными значениями при данной единице измерения. Для скалярных величин определяются отношения сравнения («равно», «больше», «меньше»), сложение и умножение на действительные числа. При этом действия со скалярными величинами и их отношения равносильны таким же действиям и отношениям с их численными значениями. Никаких других свойств у скалярных величин не предполагается.

При этом надо иметь в виду следующее: так как для величин данного рода определены действия сложения и умножения на число, то определить можно не отдельную величину, а множество всех величин (любого) данного рода. Так приходим к следующему определению.

Множеством неотрицательных скалярных величин (некоторого рода) называется множество, для элементов которого выполняются следующие условия (*аксиомы величины*).

1. Любые два элемента (две величины) этого множества **сравнимы** (либо они равны, либо одна из них больше другой), т. е. в этом множестве введены отношения «равно» — «$=$», «больше» — «$>$» и «меньше» — «$<$» и для любых двух величин a и b либо $a=b$, либо $a>b$, либо $a<b$.

2. Величины можно складывать, т. е. каждым двум величинам a и b однозначно сопоставляется некоторая величина $c=a+b$, называемая их **суммой**.

3. Величины можно умножать на неотрицательные числа, т. е. каждой величине a и каждому числу $\alpha \geqslant 0$ однозначно сопоставляется некоторая величина $b=\alpha a$ — **произведение** a **на** α.

4. Каждую величину a можно измерить некоторой величиной e, т. е. существует такое число $\lambda_e(a) \geqslant 0$,

что $a=\lambda_e(a)e$. При этом $1e=e$, т. е. $\lambda_e(e)=1$. Число $\lambda_e(a)$ называется численным значением величины a при единице e.

5. Действия над величинами и их отношениями равносильны аналогичным действиям и отношениям с их численными значениями, т. е. во-первых, $a=b$, $a>b$ или $a<b$ тогда и только тогда, когда соответственно $\lambda_e(a)=\lambda_e(b)$, $\lambda_e(a)>\lambda_e(b)$ или $\lambda_e(a)<\lambda_e(b)$; во-вторых, равенство $c=a+b$ равносильно равенству $\lambda_e(c)=\lambda_e(a)+\lambda_e(b)$; наконец, в-третьих, равенство $b=\alpha a$ равносильно равенству $\lambda_e(b)=\alpha\lambda_e(a)$.

Задачи

Разбираемся в решении

1.1.(4). Пусть A, B, C, D — точки пространства. $|AB|=|CD|=4$, $|AC|=3$, $|BC|=|AD|=5$. Может ли $|BD|=4$?

Решение.

Вопрос задачи на первый взгляд выглядит странно. В самом деле, а почему $|BD|$ не может равняться 4? Иначе говоря, а какие могут быть на величину $|BD|$ ограничения? Точки A, B, C, D будем считать вершинами тетраэдра. Вот и нарисуем тетраэдр, у которого все ребра, включая BD, отвечают условию задачи. И все.

Здесь уместно остановиться и подумать...

Полезно, например, найти аналогию с планиметрией. Фигура плоскости, аналогичная тетраэдру,— треугольник. И вы помните, конечно, что стороны треугольника не могут быть любыми отрезками — сумма двух любых из них должна быть больше третьего (так называемое неравенство треугольника). Значит, существование треугольника, стороны которого равны данным отрезкам, должно быть доказано.

Так же обстоит дело и с тетраэдром. Откуда мы знаем, что существует тетраэдр с любыми ребрами? Между прочим, ясно, что с любыми ребрами и не существует. Ведь каждая его грань — треугольник, а значит, для его ребер, лежащих в каждой грани, должно выполняться неравенство треугольника.

В данной задаче для ребер каждой грани неравенство треугольника выполняется. Но, может быть, есть и другие условия, необходимые для существования тетраэдра с шестью произвольными ребрами? Аналогия с треугольником оказалась полезной, но все-таки тетраэдр не треугольник.

Задачу о существовании тетраэдра с шестью заданными ребрами нам пока не решить — мы сделаем это позже. Но с данной задачей все же попробуем справиться.

Прежде всего заметим, что вычислить $|BD|$ исходя из условия

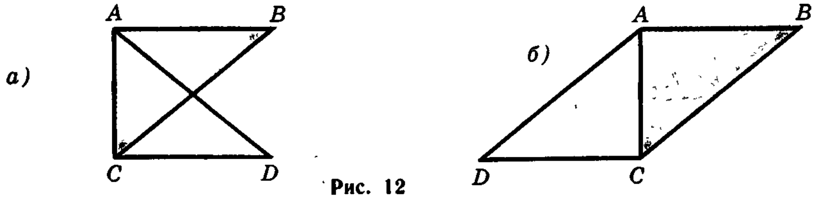


Рис. 12

задачи невозможно. Для того чтобы в этом убедиться, достаточно мысленно вращать треугольник ACD вокруг прямой AC, а треугольник ABC оставить неподвижным. Очевидно, что все данные в задаче от этого не изменяются, а $|BD|$ меняться будет.

Далее заметим, что треугольники ACD и ABC прямоугольные. (По существу это обстоятельство непринципиально — они могли бы быть и другими, от этого содержание задачи и ее решение не изменяются.)

Посмотрим теперь, какие значения может принимать $|BD|$. Для этого зафиксируем два положения треугольника ACD, когда его плоскость совпадает с плоскостью ABC. Первое положение — когда точка D находится с той же стороны от прямой AC, что и точка B (рис. 12, *а*). Второе положение — когда она находится по другую сторону от прямой AC, нежели точка B (рис. 12, *б*). В первом положении $|BD|=3$. Во втором положении $|BD|=\sqrt{73}$ (?). Первое число меньше 4, а второе число больше 4. Значит, при каком-то положении треугольника ACD $|BD|=4$. Задача решена.

Обратите внимание на то, что нам неважно, как изменяется $|BD|$: увеличивается или уменьшается. Важным для решения оказалось то, что число 4 находится между двумя значениями $|BD|$. Отсюда ясно, что вместо 4 мы могли бы взять любое число, которое находится в границах от 3 до $\sqrt{73}$ — и в этом случае решение было бы точно таким же.

Дополняем теорию

1.2.(4). Докажите, что в правильной n-угольной пирамиде апофемы всех ее боковых граней равны. (**Апофема** правильной пирамиды — это высота ее боковой грани, проведенная из вершины пирамиды.)

Смотрим

1.3.(3). Ученик нарисовал четырехугольник $ABCD$ (рис. 13). Прямая AD лежит в плоскости α, прямая BC пересекает плоскость α в точке K. Есть ли ошибка на рисунке?

(Плоскость пересекает фигуру (или фигура пересекает плоскость), если имеет с фигурой хотя бы одну общую точку и фигура лежит по разные стороны от плоскости.)

1.4.(3). Ученик нарисовал четырехугольник $ABCD$ (рис. 14). Точка D лежит в плоскости α. Прямая AB пересекает плоскость α в точке K, прямая BC пересекает плоскость α в точке L. Есть ли ошибка на рисунке?

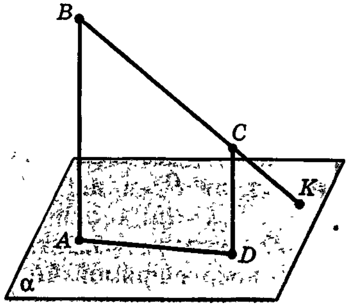


Рис. 13

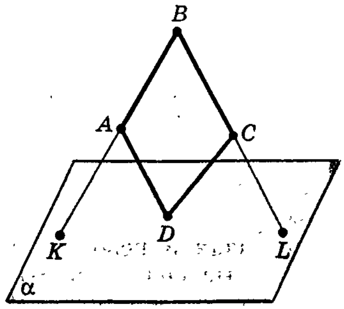


Рис. 14

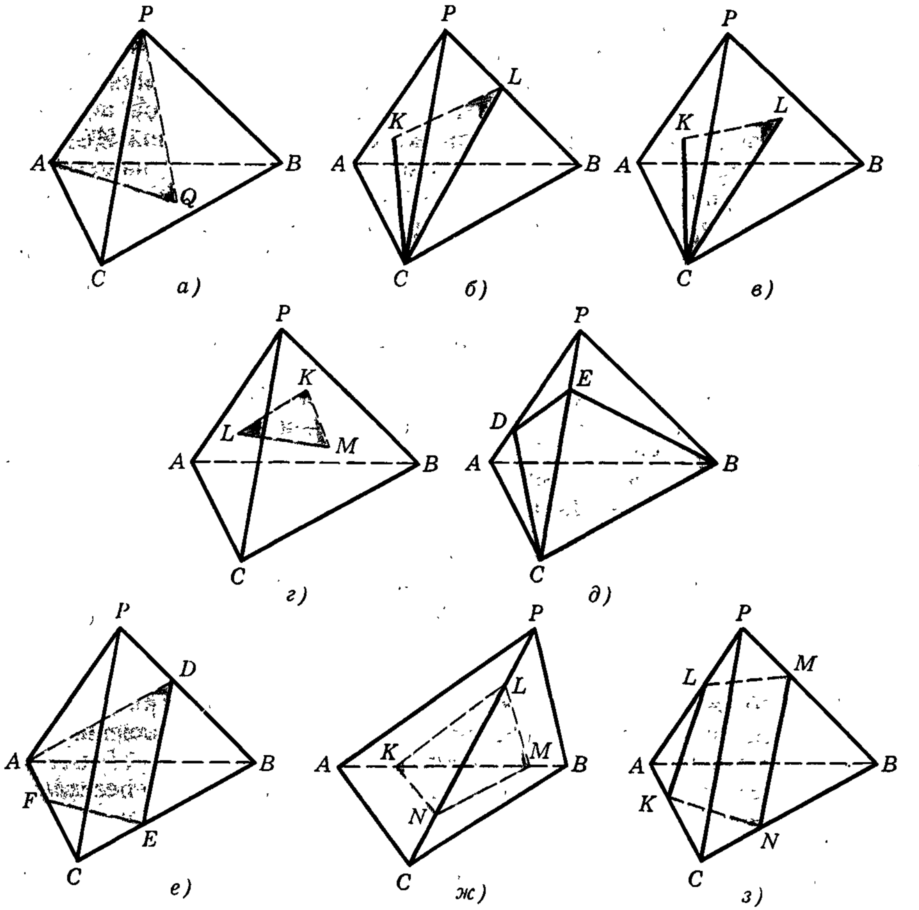


Рис. 15

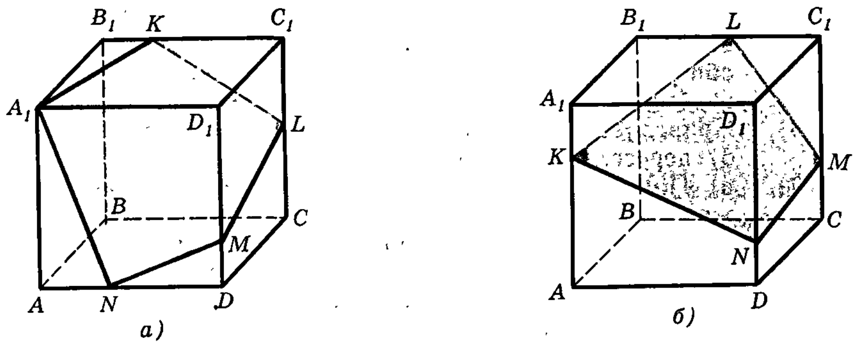


Рис. 16

1.5.(3). Ученик нарисовал сечение тетраэдра плоскостью (рис. 15, *а—з*), причем на рисунке *а* точка Q — в грани ABC, на рисунке *б* точка K — в грани PAC, на рисунке *в* точка K — в грани PAC, точка L — в грани PBC, на рисунке *г* точка K — в грани PAB, точка L — в грани PAC, точка M — в грани PBC. Есть ли ошибки на рисунках?

1.6.(3). Ученик нарисовал сечение куба плоскостью (рис. 16). Есть ли ошибки на рисунках?

Если есть, то, где возможно, сделайте верный рисунок.

Рисуем

1.7.(3). Пусть $PABC$ — правильный тетраэдр, точка Q — центр грани ABC, точка K — середина ребра AB. Нарисуйте сечение тетраэдра плоскостями: а) APQ; б) KPQ. Нарисуйте общий отрезок этих сечений.

1.8.(3). Плоскость проходит через вершину P тетраэдра $PABC$. Отметьте две точки на ребрах основания тетраэдра. Нарисуйте сечение тетраэдра этой плоскостью. Нарисуйте сечение этого же тетраэдра плоскостью, проходящей через три точки внутри его боковых ребер (по одной на каждом ребре). Нарисуйте общий отрезок этих двух сечений.

1.9.(3). Нарисуйте тетраэдр. Внутри двух его противоположных ребер отметьте по одной точке. Соедините их отрезком. Нарисуйте два сечения тетраэдра, которые пересекаются по этому отрезку. Предложите несколько вариантов возможных сечений.

Представляем

1.10.(3). Приведите пример двух одинаковых поверхностей, которые имеют: а) ровно одну общую точку; б) ровно n общих точек; в) бесконечное множество общих точек, не лежащих на одной прямой; г) ровно одну общую прямую (и при этом не являются плоскостями); д) ровно n общих прямых.

1.11.(3). В пространстве задана некоторая прямая. Приведите пример такой поверхности, которая с этой прямой имеет: а) ровно одну общую точку; б) ровно две общие точки; в) ровно n общих точек; г) бесконечное множество общих точек.

1.12.(3). В пространстве задана некоторая плоскость. Приведите пример такой неплоской линии, которая с этой плоскостью имеет: а) ровно одну общую точку; б) ровно две общие точки; в) ровно n общих точек; г) бесконечное множество общих точек.

1.13.(3). Приведите пример линии, которая: а) не лежит в одной плоскости; б) пересекает любую плоскость.

1.14.(3). а) Приведите пример фигуры, которую пересекает бесконечное множество плоскостей. Есть ли такая фигура, которую пересекает: 1) ровно одна плоскость; 2) ровно две плоскости? Есть ли такая фигура, которую не пересекает ни одна плоскость? б) Пусть фигура состоит из n точек. Есть ли такая плоскость, которая ее пересекает, причем с каждой стороны от плоскости находится одинаковое число точек?

1.15.(3). В результате пересечения скольких полупространств можно получить: а) куб; б) n-угольную призму; в) n-угольную пирамиду; г) треугольник; д) точку; е) шар; ж) круг?

1.16.(3). Плоскость пересекает тетраэдр. Сколько при этом она пересекает: а) его ребер; б) его граней?

Планируем

1.17.(4). В пространстве даны три точки. Известны расстояния между ними. Как узнать: а) лежат они на одной прямой или являются вершинами треугольника; б) если они являются вершинами треугольника, то каков его вид в зависимости от наибольшего угла?

Находим величину

1.18.(4). Пусть $PABC$ — правильный тетраэдр с ребром 1, точка Q — центр его основания, точка K — центр грани PAC, точка L — центр грани PBC, точка M — середина ребра PB, точка N — середина ребра BC. Вычислите расстояния: а) $|PQ|$; б) $|QM|$; в) $|QK|$; г) $|AL|$; д) $|KL|$; е) $|MN|$.

1.19.(4). Пусть $PABC$ — правильный тетраэдр с ребром d. Точка M — середина ребра PB, точка L — середина ребра AC, точка K — середина ребра BC, точка N — середина ребра PA, точка O — середина ребра PC. Найдите длину общего отрезка таких сечений тетраэдра: а) AMC и PLB; б) PKA и PLB; в) PLB и CMN; г) PLB и BNO; д) PLB и MNO; е) ACM и BLO; ж) AKO и BNL; з) CMN и KOL; и) KMN и AMC.

Ищем границы

1.20.(4). Сторона равностороннего треугольника ABC равна 1. Точка K удалена от точек A и B на расстояние 2. В каких границах лежит расстояние $|KC|$?

Доказываем

1.21.(3). Докажите, что существует: а) плоскость, которая пересекает данную плоскость; б) прямая, которая пересекает данную плоскость; в) плоскость, которая пересекает данную прямую.

1.22.(3). Концы ломаной, состоящей из двух отрезков, лежат по разные стороны от данной плоскости. Докажите, что она пересекает эту плоскость. Обобщите это утверждение.

1.23.(4). Дана точка A. Откуда следует, что в пространстве найдется точка, удаленная от данной на любое заданное расстояние? Какую фигуру образуют все такие точки?

1.24.(4). Даны точки A и B. $|AB|=d$. Докажите, что: а) найдется такая точка $X\neq A$, что $|XB|$ сколь угодно мало отличается от d; б) найдутся такие точки $X\neq A$ и $Y\neq B$, что $|XY|$ сколь угодно мало отличается от d.

1.25.(4). В четырехугольной пирамиде все ребра равны. а) Докажите, что эта пирамида правильная. б) Через вершину пирамиды и диагональ основания проведено сечение. Докажите, что оно является прямоугольным треугольником.

1.26.(4). Пусть $A_1A_2...A_nA_1$ — замкнутая ломаная. Докажите, что длина наибольшего ее звена меньше суммы длин всех остальных ее звеньев.

1.27.(4). Пусть $PABC$ — тетраэдр. Выделим в его гранях такие углы: PAB, PAC, ACB, PCB. Выберите любые три из них. Допустим, что они прямые. Докажите, что и четвертый из них тоже прямой.

Исследуем

1.28.(3). Вершины треугольника лежат по одну сторону от данной плоскости. Докажите, что он весь лежит по одну сторону от данной плоскости. Будет ли верно это утверждение, если вместо вершин треугольника взять другие три его точки? Будет ли оно верно для четырехугольника? Для произвольной плоской фигуры?

1.29.(4). Существуют ли такие четыре точки пространства A, B, C, D, что $|AB|=|CD|=8$, $|AC|=|BD|=10$, $|AD|=|BC|=13$?

Прикладная геометрия

1.30.(4). Самолет летит по прямой с постоянной скоростью. В любой момент времени вы можете определить расстояние до него. Как найти его скорость?

Рассуждаем

1.31.(3). Две плоскости имеют две общие точки. Объясните, почему эти общие точки лежат на общей прямой этих плоскостей.

1.32.(3). Откуда следует, что внутри каждого полупространства лежит бесконечное множество: а) точек; б) прямых?

§ 2. Способы задания прямых и плоскостей в пространстве

Здесь получим первые, самые простые следствия из принятых нами аксиом стереометрии, касающиеся прямых и плоскостей.

2.1. Прямая, заданная двумя точками

Мы начнем со следующей важной теоремы о прямой:

Теорема 2.1.

В пространстве через любые две данные точки проходит прямая, и притом только одна.

Доказательство. Пусть A, B — две данные точки. Как следует из аксиомы 1, через них проходит какая-нибудь плоскость α. На плоскости выполняется планиметрия, поэтому через точки A, B в плоскости α проходит прямая. Итак, доказано, что через любые две точки в пространстве проходит прямая.

Докажем, что эта прямая только одна. Допустим, кроме прямой a, через точки A, B проходит еще прямая b (рис. 17). По аксиоме 3 прямая, имеющая с плоскостью две общие точки, лежит в этой плоскости. Значит, прямая b содержится в плоскости α. Но в плоскости α выполняется планиметрия, и, значит, через две точки A, B проходит только одна прямая.

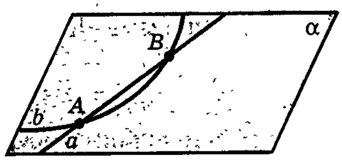


Рис. 17

Таким образом, через точки A, B в пространстве проходит только одна прямая a. ■

Из доказанной теоремы следует, что и в пространстве, как на плоскости, две прямые не могут иметь больше одной общей точки.

Определение.

Две прямые, имеющие единственную общую точку, называются пересекающимися.

Замечание 1. То, что через две точки на плоскости проходит прямая и притом только одна, в планиметрии является аксиомой, а то, что в пространстве через каждые две точки тоже проходит ровно одна прямая, мы вывели из аксиом, т. е. в стереометрии это утверждение является теоремой.

Можно было бы думать, что на плоскости через две точки проходит лишь одна прямая, а в пространстве — много. Так, например, на плоскости через две данные точки N и S проходит лишь одна окружность с диаметром NS, а в пространстве таких окружностей бесконечное множество (рис. 18).

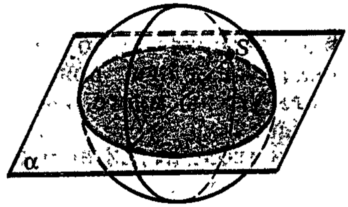


Рис. 18

Доказав теорему 2.1, можно говорить о прямых в пространстве (не обязательно рассматривая их как прямые на проходящих через них плоскостях) и задавать прямую любой парой ее точек. Аналогичное верно и для отрезков: каждые две точки в пространстве являются концами одного и только одного отрезка.

Прямая, проходящая через точки A и B, обозначается символом (AB).

Замечание 2. Итак, имеем два способа задания прямой: 1) двумя точками; 2) двумя пересекающимися плоскостями (согласно аксиоме 2).

2.2. Плоскость, определяемая тремя точками

Теорема 2.2.

Через три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость и притом только одна.

Доказательство. Пусть точки A, B, C не лежат на одной прямой. По аксиоме плоскости через каждые три точки проходит плоскость. Поэтому есть плоскость, проходящая через точки A, B, C; обозначим ее α (рис. 19). Убедимся, что она только одна.

Допустим, что через точки A, B, C проходит еще одна плоскость β, отличная от α. Плоскости α и β имеют общие точки (например, точку A). По аксиоме 2 пересечением плоскостей α и β является их общая прямая. Значит, эта прямая содержит все три точки A, B, C, общие для α и β. Но это противоречит условию теоремы, так как A, B, C не лежат на одной прямой. Итак, через A, B, C проходит лишь одна плоскость α. ■

Рис. 19

Плоскость, проходящую через три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой, обозначают (ABC).

Замечание. Теорему 2.2 иллюстрирует, например, стол на трех ножках: его крышка устойчиво лежит на трех ножках. Но на ножках, стоящих в один ряд, крышка не будет устойчивой. Если точки лежат на одной прямой, то через них проходит сколь угодно много плоскостей. Это будет доказано дальше.

Из теоремы 2.2 вытекает следствие.

Следствие.

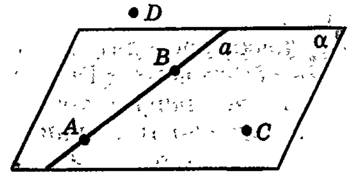


Рис. 20

В пространстве существуют четыре точки, не лежащие в одной плоскости. Для каждых двух точек можно подобрать еще две точки так, что все четыре не лежат в одной плоскости.

Доказательство. Пусть даны две точки A и B. Проведем через них какую-нибудь плоскость α и в ней возьмем точку C, не лежащую на прямой AB (рис. 20). Как показано в п. 1.2, существуют точки, не лежащие в плоскости α. Возьмем какую-нибудь такую точку D. Получим четыре точки A, B, C, D, не лежащие в одной плоскости. В плоскости α они не лежат по выбору точки D. Ни в какой другой плоскости они тоже не лежат, так как через три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой, согласно теореме 2.2 проходит единственная плоскость — это плоскость α. ■

2.3. Плоскости, проходящие через прямую

Теорема 2.3.

Через прямую и не лежащую на ней точку проходит плоскость и притом только одна.

Доказательство. Пусть даны прямая a и не лежащая на ней точка A. Возьмем на прямой a две точки B и C (рис. 21). Точка A не лежит с ними на одной прямой, так как через точки B и C проходит лишь одна прямая — это прямая a, а точка A не лежит на ней по условию теоремы.

Через три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой, согласно теореме 2.2 проходит единственная плоскость ABC. Прямая a имеет с ней две общие точки B и C и, значит, по аксиоме 3 лежит на ней. Таким образом, плоскость ABC есть искомая плоскость, проходящая через прямую a и точку A. Любая плоскость, проходящая через прямую a и

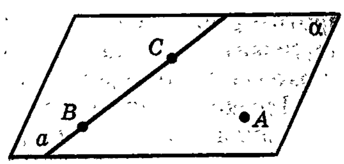


Рис. 21

точку A, содержит точки B и C и по теореме 2.2 совпадает с плоскостью ABC. Итак, искомая плоскость единственная. ■

Теорема 2.4

Через две пересекающиеся прямые проходит плоскость и притом только одна.

Докажите эту теорему самостоятельно.

Теоремы 2.2, 2.3, 2.4 указывают три способа задания плоскости: 1) *тремя точками, не лежащими на одной прямой;* 2) *прямой и не лежащей на ней точкой;* 3) *двумя пересекающимися прямыми.* Первый способ является основным, два других из него следуют.

Из доказанных утверждений вытекает, *что через каждую прямую в пространстве проходит (можно провести) сколь угодно много плоскостей.* Действительно, пусть дана прямая a. Возьмем на ней две точки A и B и, ссылаясь на следствие теоремы 2.2, присоединим к ним еще две точки C и D так, чтобы все четыре не лежали в одной плоскости. Через три точки B, C, D проводим плоскость. В этой плоскости через точку B можно провести сколько угодно прямых (рис. 22).

Через каждую такую прямую b и точку A можно провести плоскость (по теореме 2.3). Такая плоскость содержит точки A и B, а значит, и прямую a (по аксиоме 3). Таким образом, через прямую a проходит бесконечное множество плоскостей, так как через разные прямые b проходят разные плоскости (по теореме 2.4).

Замечание. Каждую из трех теорем 2.2—2.4 можно формулировать по-разному. Например, теорема 2.2 может быть сформулирована так:

Для каждых трех точек, не лежащих на одной прямой, существует содержащая их плоскость и притом только одна.

Через каждые три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость и притом только одну.

Первая формулировка выдержана в отвлеченных понятиях, вторая выражает наглядное представление о принципиальной возможности провести плоскость. Возможны и другие, хотя и не столь различные варианты формулировок; попробуйте дать еще какие-нибудь. Выразить одно и то же другими словами можно, только понимая смысл.

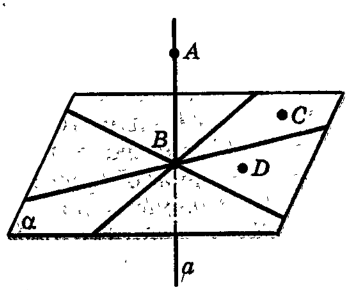


Рис. 22

Задачи

Разбираемся в решении

2.1.(2). Пусть $PABC$ — тетраэдр. Нарисуйте его сечение плоскостью: а) (XYZ), если точка X лежит внутри ребра PA, точка Y лежит внутри ребра PC, точка Z лежит внутри ребра AB; б) (XYZ), если точка X лежит внутри ребра PB, точка Y лежит внутри ребра AC, точка Z лежит внутри ребра AB; в) (XYZ), если точка X лежит внутри ребра PA, точка Y лежит внутри ребра PC, точка Z лежит внутри ребра BC; г) (XYZ), если точка X лежит внутри ребра AB, точка Y лежит внутри ребра PC, точка Z лежит внутри треугольника ABC; д) (XYZ), если точки X и Y лежат внутри треугольника ABC, точка Z лежит внутри треугольника PAB; е) (XYZ), если точка X — середина ребра PA, точка Y — середина ребра PB; точка Z — середина ребра BC.

Решение.

б) Сечение многогранника — многоугольник. Он определяется своими вершинами. Его вершинами являются точки, в которых плоскость сечения пересекается с ребрами многогранника. Если какие-то из этих точек пересечения лежат в одной грани многогранника, то, соединив их, получим сторону искомого сечения. Естественно начинать построение сечения с проведения таких отрезков, если они есть. Поэтому проведем отрезки XZ и YZ — две стороны искомого сечения (рис. 23).

Для нахождения других его сторон можно действовать по-разному. Вот один из способов. Посмотрим, где плоскость сечения пересекает прямые, содержащие ребра тетраэдра. В данном случае нас могут интересовать прямые BC, PC, PA. Выберем одну из них: пусть это будет (PA). Внимание! Сейчас главный момент решения! Эта прямая будет пересекать плоскость сечения в той точке, в которой она пересекает прямую, лежащую в плоскости сечения. Найдем точку пересечения (PA) с (XZ) — эти прямые лежат в плоскости PAB и судя по рисунку 23 не являются параллельными.

Пусть T — общая точка прямых PA и XZ, а значит, точка, в которой прямая PA пересекается с плокостью XYZ (рис. 24).

Точка T дает нам также общую точку плоскости сечения и плоскости PAC — ведь (PA) лежит в (PAC). А одна такая точка, общая для (PAC) и плоскости сечения, уже есть — это точка Y. Тогда прямая YT является общей для этих плоскостей. На нашем рисунке она пересекает ребро PC. Обозначим точку их пересечения через K. Теперь осталось только соединить точку K с точкой X, и нужное сечение нарисовано.

Можно было бы действовать несколько иначе. Например, можно сначала найти точку пересечения прямой BC с плоскостью сечения — результат был бы один и тот же (?).

И наконец, о том, почему у нас получилось такое построение.

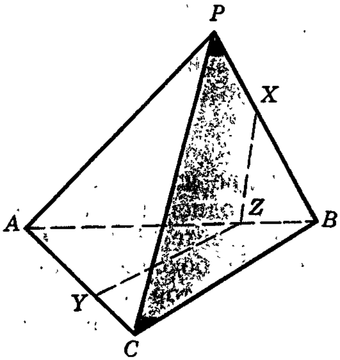


Рис. 23

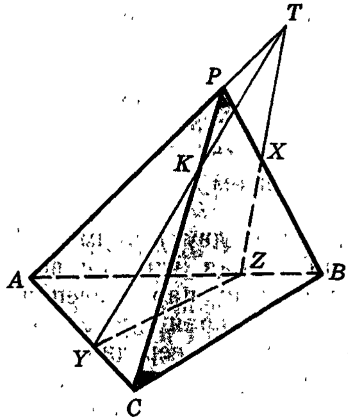


Рис. 24

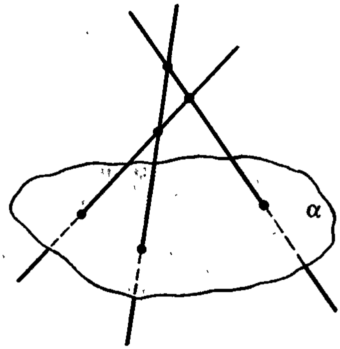


Рис. 25

Ведь могло бы оказаться, что тех точек пересечения, которые мы ищем, просто нет! Прямая PA вполне может быть параллельна (XZ) при соответствующем выборе точек. Как быть тогда?

Смотрим

2.2.(2). Три попарно пересекающиеся прямые пересекают данную плоскость (рис. 25). Верно ли сделан рисунок?

Рисуем

2.3.(1). Нарисуйте два треугольника ABC и ABD, не лежащие в одной плоскости. Внутри отрезков AD и BD возьмите точки K и L. а) Пусть (KL) пересекает (AB) в точке M. Объясните, почему точка M является точкой пересечения (KL) и (ABC). б) Пусть (KL) и (AB) не пересекаются. Объясните, почему в этом случае (KL) и (ABC) не пересекаются.

2.4.(1). Нарисуйте два треугольника ABC и CBD, не лежащие в одной плоскости. Нарисуйте сечение этой фигуры плоскостью, проходящей через: а) три точки внутри отрезков AC, AB, CD (по одной точке на каждом отрезке); б) точку внутри отрезка AC, точку на продолжении отрезка BC, точку внутри отрезка BD; в) точку A, точку внутри отрезка CD и точку внутри отрезка BD; г) точку D и среднюю линию треугольника BCD, параллельную (BC).

2.5.(1). Два квадрата $ABCD$ и $ADEF$ (вершины указаны в порядке обхода) не лежат в одной плоскости. Некоторая плоскость имеет с этой фигурой общую точку C. Нарисуйте сечение данной фигуры этой плоскостью, если, кроме того, плоскость проходит через: а) точку внутри отрезка AB и точку внутри отрезка AF; б) точку внутри отрезка AF и точку внутри отрезка EF; в) середину отрезка AF и середину отрезка DE; г) точку на продолжении отрезка AD и точку на продолжении отрезка AF.

2.6.(1). Нарисуйте четырехугольную пирамиду $PABCD$, основанием которой является произвольный четырехугольник $ABCD$. Нарисуйте прямую, по которой пересекаются: а) (PAC) и (PBD); б) (PAD) и (PBC); в) (PAB) и (PCD). Как изменится рисунок, если $ABCD$ будет параллелограммом?

Представляем

2.7.(2). Дано несколько (больше двух) прямых. Каждые две из них пересекаются. Следует ли отсюда, что они все лежат в одной плоскости?

2.8.(3). Нарисуйте прямоугольный параллелепипед. Установите форму его сечений плоскостью, которая проходит через: а) боковое ребро; б) диагональ основания; в) середины двух соседних сторон боковой грани; г) диагональ параллелепипеда — отрезок, соединяющий две вершины, не лежащие в одной грани.

2.9.(3). Нарисуйте тетраэдр. Установите форму сечения его плоскостью, которая проходит через: а) боковое ребро; б) медиану боковой грани; в) среднюю линию основания; г) середины двух противоположных ребер; д) вершину.

2.10.(3). Дана правильная n-угольная пирамида. Сможете ли вы установить форму сечения ее плоскостью, которая проходит через: а) боковое ребро; б) ребро основания; в) ее вершину и центр основания? Попробуйте это сделать без рисунка, мысленно поворачивая плоскость сечения вокруг прямой, проходящей через заданный отрезок или две заданные точки. Начните работу с треугольной пирамиды.

2.11.(3). Нарисуйте правильную треугольную призму. Установите форму ее сечения плоскостью, которая проходит через: а) сторону основания; б) боковое ребро; в) диагональ боковой грани; г) середины двух боковых ребер; д) середины двух ребер одного основания; е) середину бокового ребра и середину ребра основания.

2.12.(3). Дан куб. Установите форму сечения его плоскостью, которая проходит через: а) ребро; б) диагональ грани; в) середины двух соседних ребер одной грани; г) середины двух противоположных ребер одной грани; д) центры двух противоположных граней; е) середины двух ребер, не лежащих в одной грани; ж) две вершины, не лежащие в одной грани; з) центры двух соседних граней.

2.13.(3). Пусть $A_1A_2...A_nB_1B_2...B_n$ — правильная n-угольная призма. Установите форму сечения этой призмы, если плоскость сечения проходит через: а) боковое ребро; б) ребро основания; в) диагональ боковой грани.

Доказываем

2.14.(2). Дано n прямых. Докажите, что найдутся точки, которые не лежат на этих прямых.

2.15.(2). Даны две плоскости. а) Докажите, что найдется точка, которая не принадлежит этим плоскостям. б) Докажите, что найдется прямая, которая не лежит в этих плоскостях. Обобщите доказанные утверждения.

2.16.(2). Каждые четыре точки некоторой фигуры лежат в одной плоскости. Докажите, что и сама фигура является плоской.

2.17.(3). Дано n прямых, проходящих через данную точку. Докажите, что существуют: а) точки вне этих прямых; б) прямые, проходящие через данную точку и не совпадающие с имеющимися прямыми; в) плоскость, пересекающая все эти прямые.

Исследуем

2.18.(3). Пусть $PABC$ — тетраэдр; точка K — середина ребра BC, точка L — середина ребра PB, точка M — середина ребра PA, точка N — середина ребра AC. Можно ли провести плоскость через прямые: а) AP и KM; б) AP и KL; в) AP и LN; г) LM и KN; д) KM и NL?

2.19.(3). Плоскость пересекает куб. Сколько она может пересекать: а) его граней; б) его ребер?

Прикладная геометрия

2.20.(2). а) Объясните, почему стол на трех ножках устойчивее, чем на четырех ножках. б) Как проверить, будет ли стол на четырех ножках устойчив на горизонтальном полу, ничего не измеряя? в) Как вы объясните, почему столы в основном делают на четырех ножках, хотя они менее устойчивы?

§ 3. Взаимное расположение прямых в пространстве

3.1. Классификация взаимного расположения прямых в пространстве. Скрещивающиеся прямые

Как известно из планиметрии, для двух прямых на плоскости возможны лишь два случая их взаимного расположения: либо эти прямые пересекаются, либо они параллельны. Поскольку в пространстве имеются плоскости и на них выполняется планиметрия, то эти два случая взаимного расположения двух прямых сохраняются и для пространства. Но в пространстве добавляется еще один случай — когда две прямые не лежат в одной плоскости. Такие две прямые легко построить.

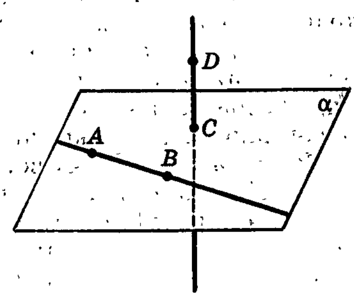


Рис. 26

Возьмем любые четыре точки A, B, C, D, не лежащие в одной плоскости. Тогда прямые AB и CD не лежат в одной плоскости (рис. 26).

Определение.

Две прямые, не лежащие в одной плоскости, называются скрещивающимися.

Иначе говоря, скрещивающиеся прямые — это такие прямые, через которые нельзя провести плоскость.

Итак, для взаимного расположения двух прямых в пространстве имеются только три исключающие друг друга возможности:

1. *Две прямые лежат в одной плоскости и имеют общую точку — пересекающиеся прямые* (рис. 27, *а*).

2. *Две прямые лежат в одной плоскости и не имеют общих точек; такие прямые, как и в планиметрии, называются параллельными* (рис. 27, *б*).

3. *Две прямые не лежат в одной плоскости — скрещивающиеся прямые* (рис. 26).

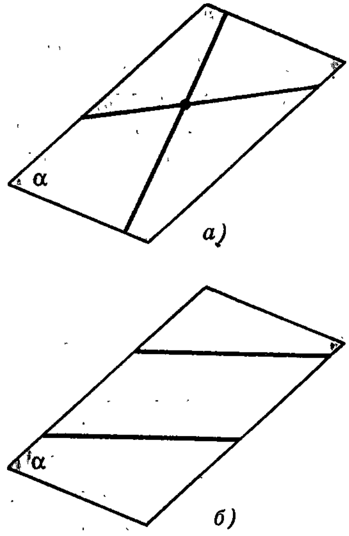


Рис. 27

Мы получили классификацию взаимного расположения двух прямых в пространстве.

Все три случая можно видеть на примере прямых, по которым встречаются стены, пол и потолок комнаты (на рис. 28, например, *a* скрещивается с *b* и параллельна *c*), или на прямых, проходящих через ребра куба.

Скрещивающиеся прямые не имеют общей точки, так как в противном случае в силу теоремы 2.4 они лежали бы в одной плоскости.

Согласно теореме 2.1 две прямые в пространстве имеют не более одной общей точки. Следовательно, они имеют либо одну общую точку, либо не имеют ни одной. Поэтому к данной классификации взаимного расположения двух прямых в пространстве можно прийти и так.

Первый случай, когда две прямые имеют общую точку,— пересекающиеся прямые. Если же две прямые не имеют общих точек, то возможны еще два случая: когда они лежат в одной плоскости — параллельные прямые и когда они не лежат в одной плоскости — скрещивающиеся прямые.

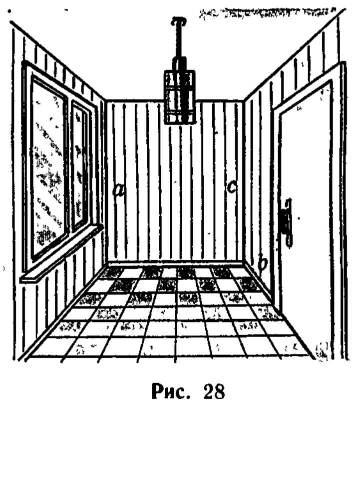


Рис. 28

В дальнейшем будет встречаться такая ситуация, когда для двух данных прямых требуется решить вопрос об их взаимном расположении, но нельзя непосредственно сослаться на соответствующие определения. Да и в других случаях, когда необходимо узнать, выполняется ли то или иное свойство, но трудно судить о наличии этого свойства непосредственно по его определению, помогают **признаки,** т. е. такие свойства, которые обеспечивают наличие свойства, положенного в определение. Вспомните, например, из планиметрии признаки параллельности прямых на плоскости, признаки параллелограмма, ромба, прямоугольника и т. п.

При построении двух скрещивающихся прямых фактически пользовались следующим признаком скрещивающихся прямых: *если две прямые содержат четыре точки, не лежащие в одной плоскости, то они скрещиваются.*

Из него легко вытекает второй признак скрещивающихся прямых: *прямая, пересекающая плоскость, скрещивается с каждой прямой, лежащей в этой плоскости и не проходящей через точку пересечения заданной прямой и плоскости.* Докажите это самостоятельно (рис. 26).

3.2. Параллельные прямые

Для параллельных прямых в пространстве так же, как на плоскости, выполняется следующее утверждение.

Теорема 3.1.

Через каждую точку, не лежащую на данной прямой, проходит прямая, параллельная данной, и притом только одна.

Доказательство. Пусть даны прямая a и не принадлежащая ей точка A. По теореме 2.3 через них проходит плоскость, обозначим ее α (рис. 29). В плоскости α, как известно из планиметрии, существует прямая $b \parallel a$ и проходящая через точку A.

Любая прямая пространства, проходящая через точку A параллельно прямой a, совпадает с прямой b. Действительно, такая прямая (по определению параллельности прямых) должна лежать в плоскости, проходящей через точку A и прямую a, т. е. в плоскости α (так как по теореме 2.3 другой плоскости, содержащей точку A и прямую a, быть не может).

В плоскости α по аксиоме параллельности есть только одна прямая, проходящая через точку A параллельно прямой a,— прямая b. Следовательно, и в пространстве существует только одна прямая,

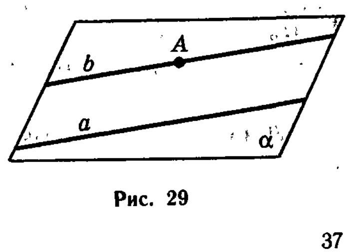


Рис. 29

проходящая через точку A параллельно прямой a,— прямая b. ■

А теперь докажем теорему, которая дает один из признаков параллельности прямых в пространстве.

Теорема 3.2.

Две прямые, параллельные третьей прямой, параллельны.

Ее доказательство опирается на лемму[1], которую докажите самостоятельно. Идея доказательства леммы указана на рисунке 30.

Лемма 3.1 *(о пересечении параллельных прямых с плоскостью).*

Если плоскость пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую из них.

Доказательство теоремы 3.2. Пусть прямые a и b параллельны прямой c. Докажем, что $a \parallel b$. Прямые a и b не имеют общей точки. Действительно, в противном случае через эту точку проходили бы две прямые, параллельные прямой c, что невозможно в силу теоремы 3.1. Покажем, что a и b лежат в одной плоскости. Возьмем любую точку $A \in a$. По теореме 2.3 через A и b проходит плоскость α (рис. 31). Покажем, что прямая a лежит в α. Действительно, в противном случае a пересекает α в точке A. А тогда по лемме 3.1 и прямая c должна пересекать α, так как $c \parallel a$. Но поскольку $b \parallel c$, то по той же лемме b пересекает α, что невозможно, так как b лежит в α. Итак, a и b лежат в плоскости α и не имеют общих точек, т. е. $a \parallel b$.

Замечание 1. К трем способам задания плоскости в пространстве, отмеченным в п. 2.3, теперь можно добавить еще один: парой параллельных прямых. А именно *через две параллельные прямые проходит плоскость, и притом только одна.*

Дайте обоснование этому утверждению и проиллюстрируйте его реальными примерами.

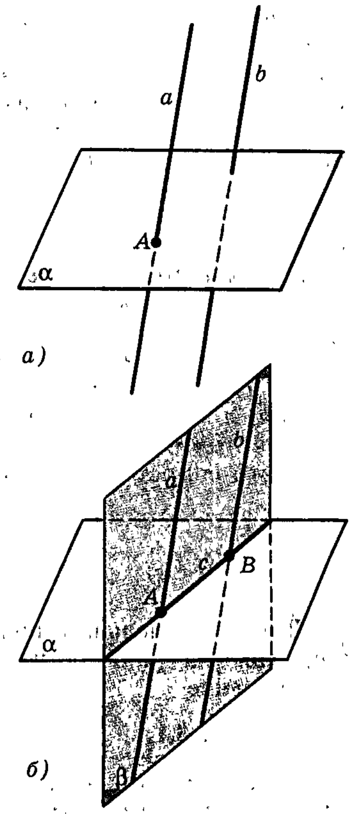


Рис. 30

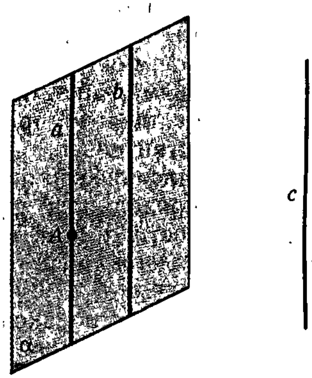


Рис. 31

---

[1] Леммой обычно называют такое предложение (теорему), которое не имеет важного самостоятельного значения, но используется при доказательстве других теорем.

Замечание 2. Среди пар прямых на плоскости пересекающиеся прямые — это общий случай, а параллельные прямые — это частный случай. Аргументировать это можно так: при любых достаточно «малых шевелениях» (т. е. при малых смещениях) прямых на плоскости пересекающиеся прямые останутся пересекающимися, а параллельность прямых не сохраняется. Для пар же прямых в пространстве с точки зрения «малых шевелений» общий случай — это скрещивающиеся прямые (они останутся скрещивающимися), а пересекающиеся и параллельные прямые — это частные случаи, так как эти свойства не сохраняются в пространстве при «малых шевелениях». Можно даже сказать, что почти все пары прямых в пространстве — это пары скрещивающихся прямых. Поясним это так. Представим себе одну из прямых (назовем ее a) вертикальной тонкой мачтой (рис. 32, *а*), а сами мы находимся в точке A. Тогда параллельно прямой a через точку A проходит единственная прямая b (рис. 32, *б*). Она тоже вертикальная. Все прямые, пересекающие прямую a и проходящие через точку A, лежат в плоскости α, проходящей через точку A и прямую a (рис. 32, *в*). А все остальные прямые, проходящие через точку A, скрещиваются с прямой a. Ясно, что их подавляющее большинство: они заполняют все пространство, за исключением одной плоскости α. Если представить, что в точке A стоит стрелок, то, чтобы выстрелить в направлении прямой, пересекающей a, ему надо прицелиться, а для скрещивающихся с прямой a целиться не надо. Транспортные развязки — вот реальные примеры скрещивающихся прямых (рис. 33).

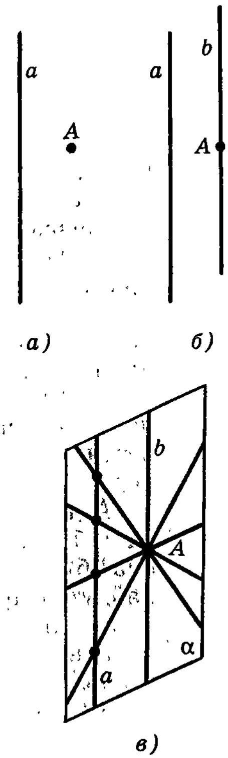


Рис. 32

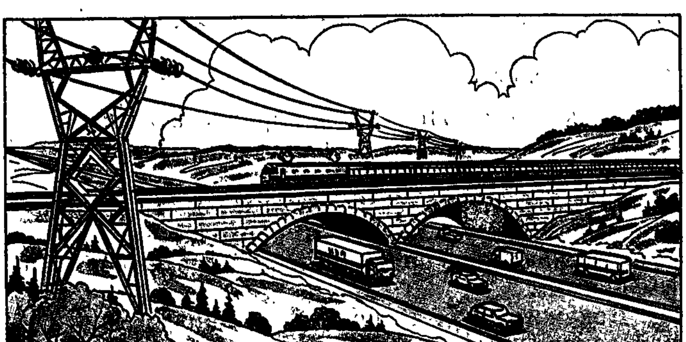


Рис. 33

Задачи

Разбираемся в решении

3.1.(2). Дано n попарно скрещивающихся прямых. Докажите, что: а) существуют точки, не лежащие на этих прямых; б) существует плоскость, которая пересекает каждую из них; в) существует прямая, которая скрещивается с каждой из них.

Решение.

а) Проведем плоскость через одну из данных прямых. Остальные прямые либо пересекают эту плоскость, либо не имеют с ней общих точек — других случаев расположения быть не может. Как бы там ни было, в проведенной плоскости найдутся точки, не принадлежащие данным прямым (?).

б) Выберем точку в пространстве и проведем через нее прямые, параллельные каждой из данных прямых. Согласно задаче 2.17 найдется плоскость, которая пересекает все эти прямые. Но тогда она пересекает и все данные прямые (?).

А вот решение, основанное на наглядных соображениях. Через одну из данных прямых проведем плоскость. Если нам повезет, то она будет пересекать все остальные данные прямые. Если нет и найдутся прямые, которых она не пересекает, то будем поворачивать нашу плоскость вокруг прямой, через которую она была проведена, пока не добьемся нужного нам положения. Осталось добиться того, чтобы плоскость пересекала и первоначально взятую прямую. Но ведь таким поворотом этого не добиться! Как же быть? А мы эту плоскость «чуть-чуть пошевелим» так, чтобы она уже не содержала первую прямую, а пересекала ее — этого можно добиться также поворотом, но только вокруг другой прямой (какой?). Ясно, что при таком «малом шевелении» можно считать, что взаимное положение плоскости и каждой из этих прямых не изменилось. Значит, задача решена.

в) В плоскости, построенной в пункте б), возьмем прямую, которая проходит мимо всех точек пересечения этой плоскости с данными прямыми. Такая прямая всегда найдется (?). Она и будет искомой согласно одному из признаков скрещивающихся прямых.

Дополняем теорию

3.2.(2). Прямая a лежит в плоскости α. Прямая b параллельна прямой a и имеет общую точку с плоскостью α. Докажите, что и прямая b лежит в плоскости α.

3.3.(2). Прямые a и b параллельны. Точка O не лежит на этих прямых. Плоскость α проходит через O и a, плоскость β проходит через O и b. Пусть эти плоскости пересекаются по прямой c. Докажите, что прямая c параллельна данным прямым.

3.4.(2). Дан параллелепипед. Докажите, что: а) прямая, соединяющая центры симметрии его противоположных граней, параллельна его ребру; б) все его диагонали имеют общую точку.

3.5.(2). Две прямые скрещиваются. Проводятся прямые, параллельные одной из них и пересекающие другую. Докажите, что все эти проведенные прямые лежат в одной плоскости.

Представляем

3.6.(2). Пусть $PABC$ — тетраэдр. Какой фигурой является множество середин всех отрезков KL, если точка K лежит на ребре PA, а точка L лежит на ребре: а) PC; б) BC?

3.7.(2). Точка A не лежит на прямой a. Через точку A проводятся всевозможные прямые: а) пересекающие прямую a; б) скрещивающиеся с прямой a. Какую фигуру заполняют все такие прямые?

Доказываем

3.8.(2). Дана неплоская замкнутая ломаная из четырех звеньев. Точки A, B, C, D — середины ее последовательных звеньев. Докажите, что: а) $(AB) \| CD)$; б) $(AD) \| (BC)$; в) (AC) и (BD) пересекаются.

3.9.(2). Даны два параллелограмма ABB_1A_1 и ACC_1A_1. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

3.10.(2). Через вершины треугольника ABC провели параллельные прямые, пересекающие его плоскость. С одной стороны от его плоскости на этих прямых отложили равные отрезки AA_1, BB_1, CC_1. Докажите, что $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle ABC$. Обобщите это утверждение.

3.11.(2). Дан параллелепипед. Докажите, что: а) для каждого его ребра в нем найдутся три ребра, ему параллельные; б) для каждой диагонали его грани найдется параллельная и равная ей диагональ в другой грани.

3.12.(2). Докажите, что отрезки, соединяющие середины противоположных ребер тетраэдра, имеют общую точку.

3.13.(2). Имеется n прямых a_1, a_2, ... , a_n. Каждые две соседние по номеру параллельны. Докажите, что все эти прямые параллельны.

3.14.(2). Плоскости α и β пересекаются по прямой p. Точка A лежит в плоскости α, точка B лежит в плоскости β, причем ни одна из них не лежит на прямой p. Докажите, что прямые p и AB скрещиваются. Сформулируйте это утверждение как еще один признак скрещивающихся прямых.

3.15.(2). Плоскости α и β пересекаются по прямой p. Точки A и B лежат в плоскости α, точки C и D лежат в плоскости β. Прямая AB пересекается с прямой p в точке K, а прямая CD пересекается с прямой p в точке L. Докажите, что прямые AB и CD скрещиваются тогда и только тогда, когда точки K и L различны.

Исследуем

3.16.(2). Даны два равных треугольника. Две стороны одного из них соответственно параллельны двум сторонам другого. Следует ли из этого, что их третьи стороны также параллельны между собой? Проверьте свое предположение на двух равных чертежных угольниках.

3.17.(2). Даны четыре точки A, B, C, D. Проверьте равносильность двух утверждений: а) прямые AB и CD скрещиваются; б) прямые AC и BD скрещиваются. (Это еще один признак скрещивающихся прямых.) Будет ли выполняться аналогичная равносильность для пересекающихся прямых? для параллельных прямых?

3.18.(2). Пусть $PABC$ — тетраэдр, точка K — середина ребра PA, точка L — середина ребра AB, точка M — середина ребра BC, точка N — середина ребра PC, точка O лежит на ребре PB. Как расположены прямые: а) AP и BC; б) KL и MO; в) KL и BC; г) KN и LO; д) AO и KL; е) KM и CO; ж) NO и LC; з) MO и PC; и) KN и LM?

3.19.(2). Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, точка K_1 — середина ребра A_1B_1, точка K_2 — середина ребра B_1C_1, точка K_3 — середина ребра BB_1, точка K_4 — середина ребра CC_1, точка K_5 — середина ребра DD_1, точка K_6 — середина ребра AB, точка K_7 — середина ребра AD. Как расположены прямые: а) K_1K_2 и K_3K_4; б) K_1K_3 и K_6K_7; в) K_1K_5 и K_2K_4; г) K_3K_4 и K_2K_7; д) K_1K_5 и K_4K_6; е) B_1D и K_2K_7? Возьмите пару прямых, определяемых данными точками, и установите их взаимное расположение.

3.20.(2). Прямые a и b скрещиваются. Точка O не лежит на этих прямых. Плоскость α проведена через O и a, плоскость β проведена через O и b. Пусть эти плоскости пересекаются по прямой c. Исследуйте взаимное расположение прямой c и данных прямых.

3.21.(2). Две прямые скрещиваются. Верно ли, что каждая плоскость, пересекающая одну из них, пересекает и другую? Ответьте на этот же вопрос для другого взаимного расположения данных прямых. В результате вы сможете получить один из признаков некоторого расположения двух прямых. Что это за признак?

3.22.(2). В пространстве даны три прямые a, b, c. Исследуйте взаимное расположение прямых a и c в зависимости от взаимного расположения прямых a и b, b и c.

Рассуждаем

3.23.(2). Прямая a лежит в плоскости α, а прямая b параллельна прямой a. Может ли прямая b пересекать плоскость α?

3.24.(2). Являются ли прямые скрещивающимися, если: а) обе они не лежат в плоскости α; б) одна из них лежит в плоскости α, а другая лежит в плоскости β; в) одна из них лежит в плоскости α, а другая пересекает плоскость α; г) плоскость α проходит через две точки одной и две точки другой?

§ 4. Параллельное проектирование

4.1. Определение параллельного проектирования

Параллельным проектированием пользуются, например, при изображении на плоскости (скажем, на бумаге) фигур, расположенных в пространстве. Определяется оно так.

Пусть даны плоскость α и пересекающая ее прямая a. Возьмем в пространстве произвольную точку X. В том случае, когда точка X не лежит на a, через X проводим прямую a', параллельную прямой a (рис. 34). Прямая a' пересекает плоскость α в некоторой точке X'. Эта точка называется **проекцией (на плоскость α) точки X при проектировании параллельно прямой a** или, короче, **параллельной проекцией точки** X. Если точка X лежит на прямой a, то ее параллельной проекцией X' называется точка, в которой a пересекает α. Заметим, что в случае, когда $X \in \alpha$, точка X' совпадает с точкой X.

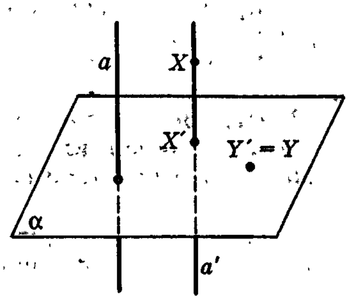


Рис. 34

Таким образом, если заданы плоскость α и пересекающая ее прямая a, то каждой точке X пространства можно сопоставить единственную точку X' — параллельную проекцию точки X на плоскость α (при проектировании параллельно прямой a). Плоскость α называется **плоскостью проекций**. О прямой a говорят, что она задает **направление проектирования**, потому что при замене прямой a любой другой параллельной ей прямой результат проектирования не изменится (поскольку две прямые, параллельные третьей, параллельны). Все прямые, параллельные прямой a, задают одно и то же направление проектирования и называются вместе с прямой a **проектирующими прямыми**.

Проекцией фигуры F называется множество F' проекций всех ее точек. Отображение, сопоставляющее каждой точке X фигуры F ее параллельную проекцию $X' \in F'$, называется **параллельным проектированием** фигуры F (рис. 35).

Параллельную проекцию реальной фигуры представляет, например, ее тень, падающая на плоскую поверхность при солнечном освещении, поскольку солнечные лучи можно считать параллельными. Так что, глядя на свою тень на земле или на стене, вы видите свою параллельную проекцию.

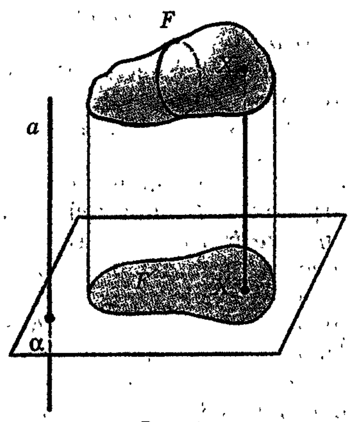


Рис. 35

4.2. Основные свойства параллельного проектирования

Теорема 4.1 *(о параллельном проектировании).*

При параллельном проектировании для прямых, не параллельных направлению проектирования, и для лежащих на них отрезков выполняются следующие свойства:

1. Проекция прямой есть прямая, а проекция отрезка — отрезок.

2. Проекции параллельных прямых параллельны или совпадают.

3. Отношение длин проекций отрезков, лежащих на одной прямой или на параллельных прямых, равно отношению длин самих отрезков.

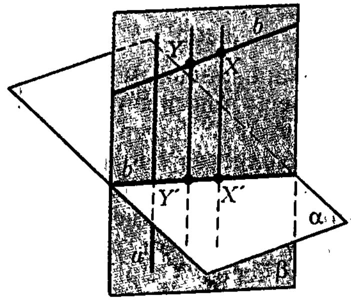


Рис. 36

Доказательство. Пусть α — плоскость проекций и прямая a задает направление проектирования.

1. Рассмотрим какую-либо прямую b, не параллельную прямой a. Так как a можно заменить любой параллельной ей прямой, то можно считать, что a пересекает b. Тогда через прямые a и b проходит плоскость β. Она пересекает плоскость α по некоторой прямой b'. Эта прямая b' и будет проекцией прямой b (рис. 36).

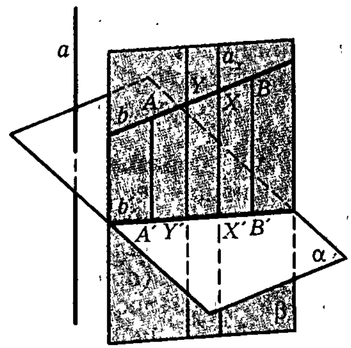


Рис. 37

В самом деле, проекцией каждой точки $X \in b$ будет некоторая точка $X' \in b'$ и каждая точка $Y' \in b'$ является проекцией некоторой точки $Y \in b$. Это потому, что все проектирующие прямые, пересекающие прямую b (прямую b'), находятся в плоскости β, а значит, пересекают прямую b' (прямую b).

Теперь докажем, что проекцией отрезка является отрезок.

Пусть две точки A и B лежат на прямой b, а точки A' и B' — их проекции. Тогда $A' \in b'$, $B' \in b'$ и проекцией отрезка AB прямой b является отрезок $A'B'$ прямой b' (рис. 37). Действительно, прямые b и b' лежат в одной плоскости β, проектирующая прямая a_x, проходящая через любую внутреннюю точку X отрезка AB, идет между проектирующими прямыми, проходящими через A и B. Поэтому и точка X' на прямой b' лежит между A' и B', т. е. на отрезке $A'B'$. Когда X пробегает отрезок AB, точка X' пробегает отрезок $A'B'$.

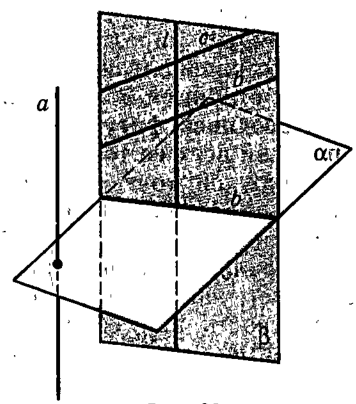


Рис. 38

2. Пусть теперь даны две параллельные прямые

b и c. Возможны два случая. а) Некоторая проектирующая прямая $l \| a$ пересекает и прямую b, и прямую c (рис. 38). В этом случае прямая l, а также все остальные проектирующие прямые, пересекающие b или c, лежат в одной плоскости β, в той плоскости, которая проходит через параллельные прямые b и c. Как доказано выше, проекцией и прямой b, и прямой c в этом случае будет прямая b', по которой плоскость β пересекает плоскость α. б) Не существует проектирующих прямых, пересекающих одновременно и b, и c. В этом случае проекции прямых b и c на плоскость α — прямые b' и c' — не имеют общих точек, т. е. параллельны (рис. 39).

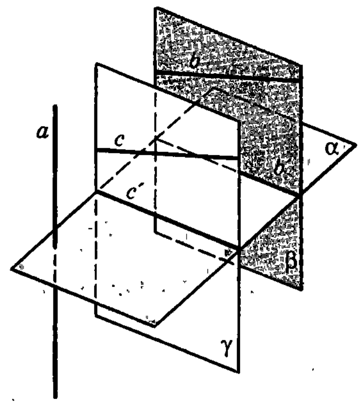


Рис. 39

Итак, два первых утверждения теоремы доказаны. Докажем третье.

3. Рассмотрим два отрезка: AB и CD, лежащие на одной прямой b. Как в первом случае, строим проекцию b' прямой b, проводя плоскость β через a и b: $b' = \alpha \cap \beta$. Проекции $A'B'$ и $C'D'$ отрезков AB и CD лежат на b' (рис. 40). Проектирующие прямые, проходящие через точки A, B, C, D, параллельны прямой a и, стало быть, параллельны друг другу (или совпадают). Кроме того, они все лежат в плоскости β. По известной теореме планиметрии параллельные прямые отсекают на двух прямых пропорциональные отрезки. Значит,

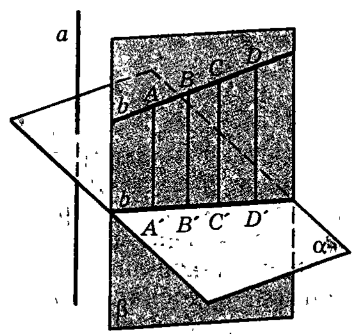


Рис. 40

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}.$$

Тем самым свойство 3 доказано для отрезков, лежащих на одной прямой.

Пусть теперь отрезки AB и CD лежат на параллельных прямых b и c (рис. 41). Прямые эти лежат в одной плоскости. Проведем прямую AC и через точку B — прямую, ей параллельную. Она пересечет прямую c в какой-то точке M. Получим параллелограмм $ABMC$.

Проекцией этого параллелограмма на плоскость α будет параллелограмм (когда проекции параллельных прямых параллельны) или отрезок (когда эти проекции совпадают). Мы рассмотрим более сложный случай, когда $A'B'M'C'$ — параллелограмм (рассуждения для другого случая лишь упрощаются). Его противоположными сторонами являются отрезки $A'B'$ и $C'M'$ — проекции отрезков AB и CM. Так как те и другие — стороны параллелограммов, то $AB = CM$, $A'B' = C'M'$.

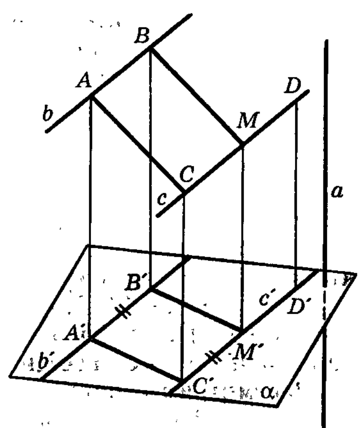


Рис. 41

Отрезок $C'M'$ служит проекцией отрезка CM, лежащего на одной прямой с отрезком CD. Поэтому по доказанному

$$\frac{CM}{CD}=\frac{C'M'}{C'D'}.$$

Отсюда и из предыдущих равенств следует, что

$$\frac{AB}{CD}=\frac{A'B'}{C'D'},$$

т. е. длины проекций параллельных отрезков пропорциональны длинам самих отрезков. ■

Отметим, что из доказанного, в частности, вытекает следствие.

Следствие. ***При параллельном проектировании середина отрезка проектируется в середину его проекции.***

4.3. Изображение разных фигур в параллельной проекции

Рисунки, иллюстрирующие предложения стереометрии и представляющие фигуры в пространстве, делают обычно в параллельной проекции. Точнее, за изображение фигуры принимается фигура, подобная какой-либо ее параллельной проекции. Фигура, подобная параллельной проекции фигуры, очевидно, обладает теми же свойствами, что указаны в теореме о параллельной проекции. Поэтому, делая рисунки (чертежи), нужно следить за тем, чтобы на них выполнялись эти свойства. Они называются **аффинными свойствами фигур.**

В остальном изображение может быть произвольным, т. е. никакие другие условия не являются обязательными. Это видно из того, что углы и отношения длин непараллельных отрезков могут изменяться произвольно. Остается только естественное требование наглядности, чтобы изображение напоминало фигуру — вызывало верное представление о ней. Например, можно спроектировать куб так, чтобы получилось такое же изображение, как на рисунке 42. Но это не дает представления о кубе, а скорее похоже на загадку: «Что здесь нарисовано?» — с неожиданным ответом: «Куб».

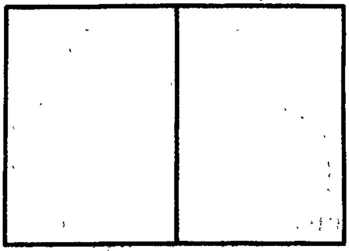


Рис. 42

Рассмотрим изображение некоторых фигур. Случай, когда фигура лежит в плоскости, заполненной проектирующими прямыми, и, следовательно, проектируется в некоторую фигуру, лежащую на прямой, исключаем.

1. Треугольник. Каждый треугольник можно параллельно спроектировать так, что в проекции получится треугольник любого вида, т. е. подобный любому заданному треугольнику.

Действительно, пусть даны два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$. Проведем через прямую AB плоскость α, пересекающую плоскость треугольника ABC. На ней построим треугольник ABC', подобный треугольнику $A_1B_1C_1$, прилегающий к треугольнику ABC по стороне AB (рис. 43). Тогда при проектировании на плоскость α параллельно прямой CC' треугольник ABC спроектируется на треугольник ABC' так, что его проекция будет подобна треугольнику $A_1B_1C_1$. В частности, всякий треугольник можно спроектировать так, чтобы получился равносторонний треугольник.

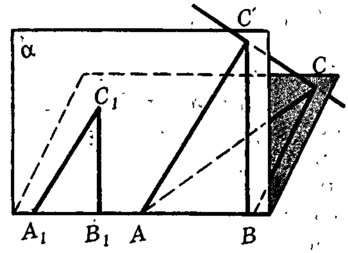


Рис. 43

2. Параллелограмм. Изображением параллелограмма может служить любой параллелограмм. (Почему? Какая связь с изображением треугольника?)

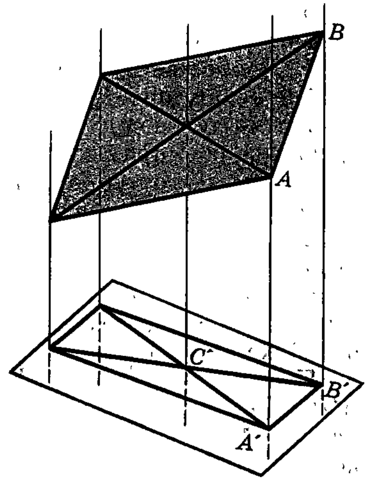


Рис. 44

3. Изображение плоской фигуры. Для изображения плоской фигуры можно поступить так. В данной фигуре выделяют какие-нибудь три точки, не лежащие на одной прямой, и строят треугольник с вершинами в этих точках; обозначим их A, B, C (рис. 44). Строят изображение треугольника ABC в виде произвольного треугольника $A'B'C'$. После того как построено это изображение, никакого произвола в изображении фигуры быть не может. Покажем это.

Пусть изображением треугольника ABC служит треугольник $A'B'C'$ (рис. 45). Пусть точка X лежит в плоскости ABC и луч CX пересекает отрезок AB во внутренней его точке D. Проекция точки D — точка D' — лежит на отрезке $A'B'$ (откуда это следует?), и

$$\frac{A'D'}{D'B'}=\frac{AD}{DB}.$$

Следовательно, точку D' на отрезке $A'B'$ можно построить на рисунке (как?). Далее проводим луч $C'D'$ и на нем отмечаем такую точку X', что

$$\frac{C'X'}{C'D'}=\frac{CX}{CD}.$$

(объясните, как это сделать). Мы построили на рисунке проекцию данной точки X плоскости ABC.

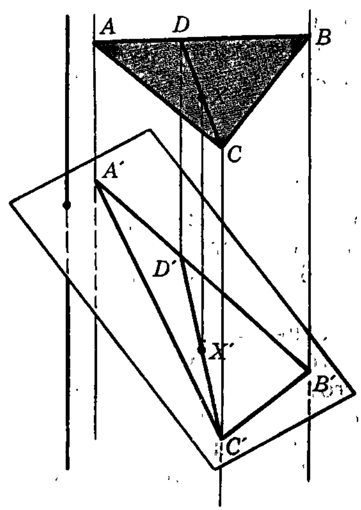


Рис. 45

(Точка X может располагаться и по-иному относительно треугольника ABC, но и тогда построение будет аналогичным.)

4. Тетраэдр. ***Изображать тетраэдр можно любым по форме четырехугольником с диагоналями.*** Эту трудную теорему доказали в середине XIX века два немецких геометра Карл Польке и Герман Шварц. Чаще всего тетраэдр рисуют так, как он изображен на рисунке 46, *а* (штриховой линией выделяется невидимое ребро). Но можно его изобразить и так, как на рисунке 46, *б*: это правильно, но менее наглядно.

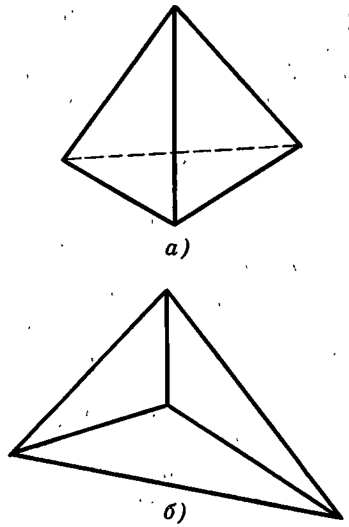


Рис. 46

5. Изображение пространственной фигуры. При изображении пространственной фигуры роль изображения тетраэдра аналогична роли изображения треугольника при изображении плоской фигуры. Изображая пространственную фигуру, в ней выделяют сначала четыре точки, не лежащие в одной плоскости, т. е. вершины некоторого тетраэдра, и строят его изображение. После того как построено изображение этого тетраэдра, никакого произвола в изображении точек данной фигуры быть не должно. Покажем это.

Пусть $ABCD$ — выделенный тетраэдр, а $A'B'C'D'$ — его изображение. Возьмем точку X данной фигуры, и пусть луч CX пересекает плоскость ABD в точке K внутри треугольника ABD (рис. 47). Изображение точки K — точка K' лежит внутри треугольника $A'B'D'$ (откуда это следует?), причем она может быть построена (мы показали это в примере 3). Но тогда изображение X' точки X лежит на луче CK, причем

$$\frac{K'X'}{C'K'} = \frac{KX}{CK}.$$

Точка X может располагаться по-иному относительно тетраэдра, но и тогда рассуждение будет аналогичным.

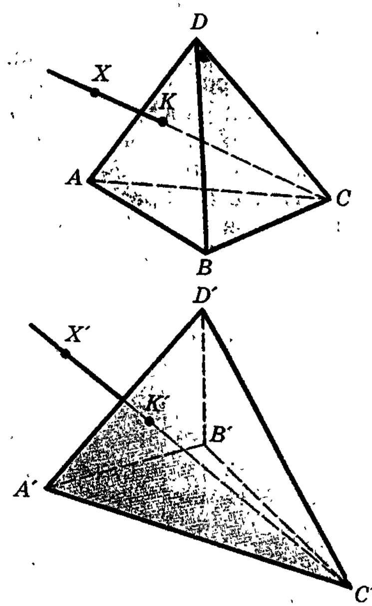


Рис. 47

Вообще же, как вы уже поняли, глядя на рисунки 13—16 к задачам § 1, далеко не каждому рисунку соответствует пространственная фигура, которую изображает данный рисунок. Завершим этот параграф тремя известными парадоксами, основанными на неверном изображении пространственных объектов (рис. 48—50).

Какие из правил изображения в них нарушены?

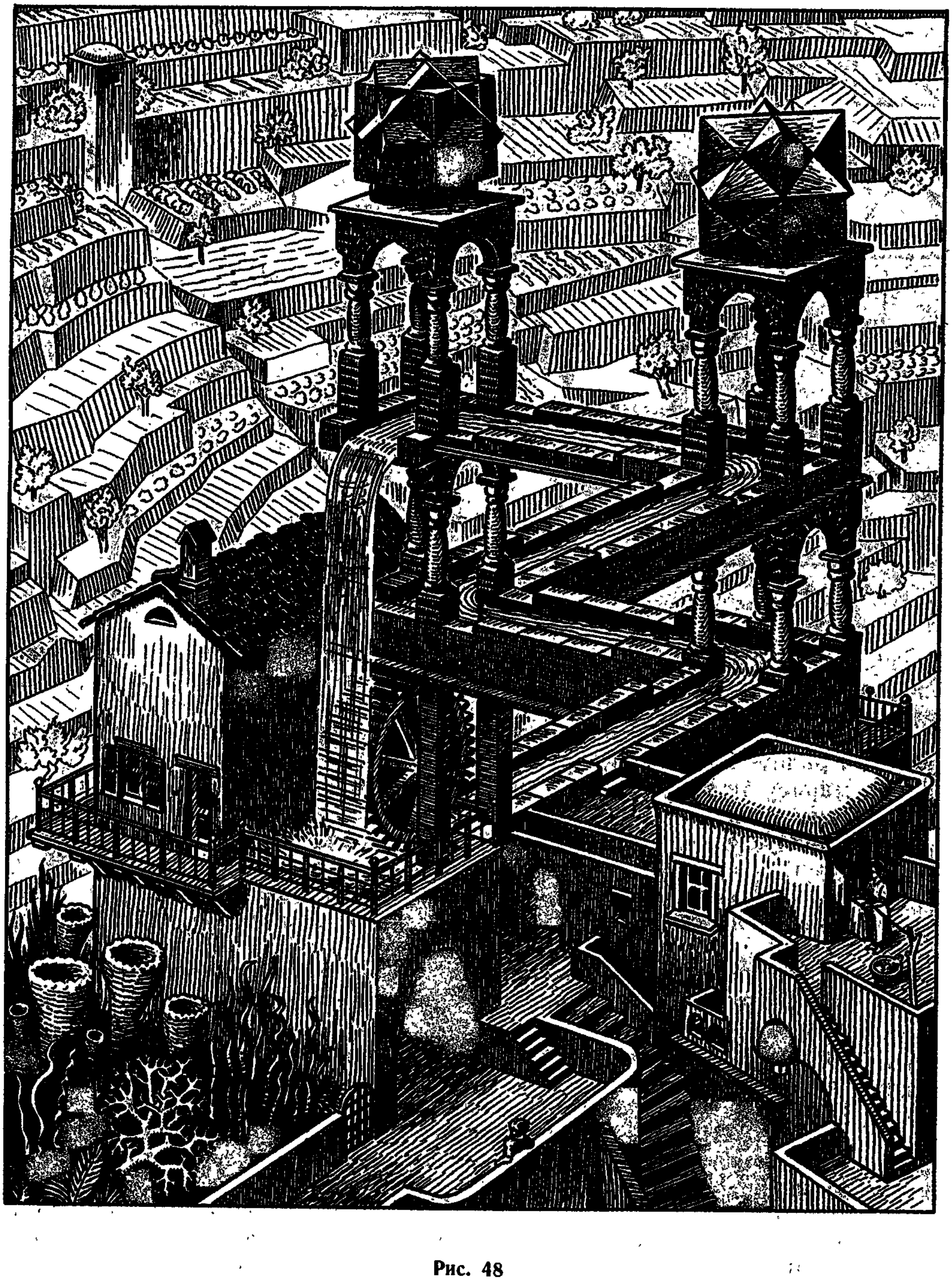


Рис. 48

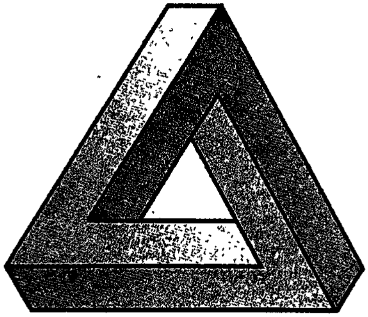


Рис. 49

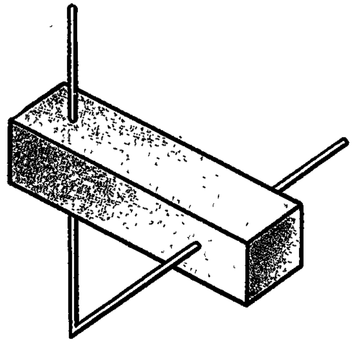


Рис. 50

Задачи

Смотрим

4.1. Какие из фигур на рисунке 51 являются параллельными проекциями куба?

Рисуем

4.2. Нарисуйте параллельную проекцию равностороннего треугольника, а в нем среднюю линию, радиус описанной окружности и радиус вписанной окружности.

4.3. Нарисуйте параллельную проекцию квадрата, а в нем радиус описанной и радиус вписанной окружностей.

4.4. Нарисуйте параллельную проекцию прямоугольника, а в нем две оси симметрии.

4.5. Нарисуйте параллельную проекцию параллелограмма (тремя способами).

4.6. Нарисуйте параллельную проекцию равнобедренной трапеции, у которой одно основание в два раза больше другого, а в ней ось симметрии.

4.7. На рисунке 52 изображены проекции четырехугольной пирамиды. Нарисуйте пирамиду, плоскость проекции и направление проектирования.

4.8. Нарисуйте параллельную проекцию квадрата, вписанного в правильный треугольник.

4.9. Нарисуйте параллельную проекцию фигуры, являющейся объединением квадрата и равностороннего треугольника, имеющих общую сторону.

4.10. Нарисуйте параллельную проекцию правильного: а) шестиугольника; б) пятиугольника.

4.11. Дан эллипс, являющийся параллельной проекцией некоторой окружности. Нарисуйте: а) центр окружности; б) касательную к ней в некоторой ее точке; в) вписанный в нее равносторонний треугольник;

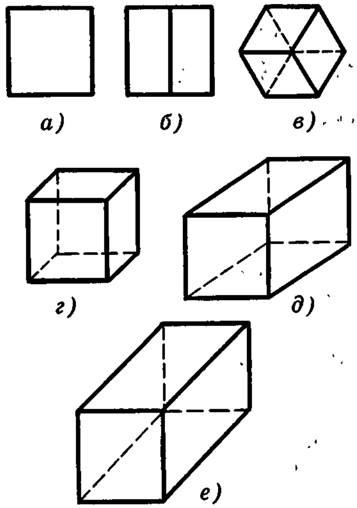


Рис. 51

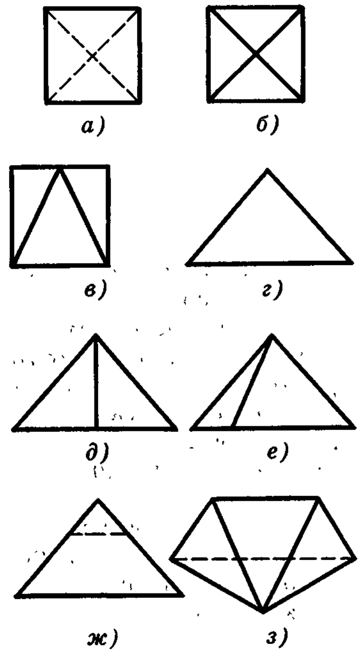


Рис. 52

г) описанный около нее равносторонний треугольник; д) вписанный в нее квадрат; е) описанный около нее квадрат; ж) касательную к ней, проведенную из точки, изображение которой находится на продолжении оси эллипса.

Доказываем

4.12. Используя параллельное проектирование, докажите, что: а) медианы треугольника пересекаются в одной точке; б) средняя линия оснований трапеции проходит через точку пересечения ее диагоналей и точку пересечения продолжений ее боковых сторон.

Исследуем

4.13. Может ли: а) параллельная проекция равностороннего треугольника быть прямоугольным треугольником; б) параллельная проекция угла в 20° быть углом величиной 21°?

§ 5. Существование и единственность. Построения

5.1. Существование и единственность

Теорема 2.2 о плоскости, проходящей через три точки, состоит из двух частей — из двух теорем, которые можно сформулировать так:

1) *для каждых трех точек, не лежащих на одной прямой, существует содержащая их плоскость;*

2) *такая плоскость только одна.*

Первая часть — это утверждение существования, вторая — утверждение единственности.

Для того чтобы разделить эти два утверждения еще более четко, заменим первое из них одним из утверждений аксиомы плоскости и сформулируем их в таком виде:

Утверждение существования. ***Для каждых трех точек существует содержащая их плоскость.***

Утверждение единственности. ***Для каждых трех точек, не лежащих на одной прямой, существует не более одной содержащей их плоскости.***

В первом утверждении нет условия, что точки не лежат на одной прямой. Оно здесь не нужно. Если точки лежат на прямой, то через них тоже проходит плоскость, только она уже не будет единственной.

Такие утверждения, взятые по отдельности, называют теоремами (или аксиомами) существования и единственности.

Хотя существование и единственность постоянно связывают вместе, как в теоремах 2.1—2.4, но на самом деле они не только резко различаются, но и не зависят друг от друга. Существование предмета не подразумевает его единственности. Если вы говорите, что у вас есть тетрадь, то это никак не подразумевает, что она только одна, их может быть несколько. Например, если заданы прямая a и точка A, лежащая вне a, то, как доказано в п. 3.1, существует прямая b, проходящая через A и скрещивающаяся с прямой a, но эта прямая b не единственная, таких прямых бесконечное множество.

С другой стороны, утверждение единственности означает, что не может существовать двух предметов или, как обычно говорят, существует не более одного предмета. Так что либо предмет существует и он только один, либо его нет вовсе. Так, через три точки проходит не более одной окружности. Но может не проходить ни одной, так будет, когда три точки лежат на одной прямой.

Теоремы существования и единственности составляют важную часть разных разделов математики, не только геометрии, но и алгебры, анализа и других областей математики.

Классический пример утверждений существования и единственности из планиметрии: *через точку, не лежащую на данной прямой, проходит прямая, ей параллельная, и притом только одна.* Существование такой прямой доказывается: имеет место теорема существования прямой, параллельной данной. Единственность же составляет содержание аксиомы о параллельных прямых.

Единственность часто доказывается методом от противного, т. е. предполагают, что имеется два объекта, удовлетворяющие данному условию, и приходят к противоречию. Так была доказана единственность в теореме 2.1 о прямой, проходящей через две точки.

Если же в теореме утверждается существование и единственность некоторого объекта и сначала доказывается существование построением этого объекта, то часто затем его единственность доказывается так: устанавливают, что любой объект, удовлетворяющий условию теоремы, совпадает с уже построенным. Так была доказана единственность в теоремах 2.3 и 3.1. В дальнейшем применяются оба эти способа при доказательствах единственности.

5.2. Построения в пространстве как теоремы существования

В сформулированных нами аксиомах и первых теоремах говорится о принципиальной возможности выполнить некоторые реальные построения: провести прямую через две точки — натянуть веревку между двумя колышками; провести плоскость через три точки — уложить плоский предмет на три опоры, провести плоскость через прямую и точку — зафиксировать положение двери с помощью замка или другого предмета и т. д.

И в дальнейшем будем говорить о построениях в пространстве, т. е. мысленно строить в пространстве фигуры с теми или иными свойствами. Как и в рассмотренных уже теоремах, такое построение доказывает существование искомой фигуры. Иногда доказательство существования будет проводиться в виде решения задачи на построение (так было и в планиметрии).

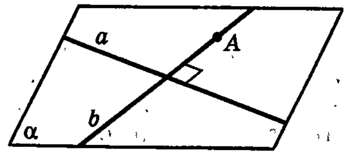


Рис. 53

Рассмотрим, к примеру, такую задачу на построение.

Задача.

Через данную точку пространства провести прямую, пересекающую данную прямую и перпендикулярную этой прямой.

Решение. Пусть в пространстве заданы точка A и прямая a. Возможны два случая.

Случай 1. Точка A не лежит на прямой a (рис. 53).

Проведем (по теореме 2.3) через точку A и прямую a плоскость α. По известной теореме планиметрии в плоскости α через точку A можно провести единственную прямую b, перпендикулярную прямой a. Итак, построили искомую прямую b: она проходит через точку A, пересекает прямую a и перпендикулярна прямой a.

В рассматриваемом случае решение единственно, так как прямая, удовлетворяющая условию задачи, лежит в единственной плоскости α, проходящей через A и a, а в плоскости можно через данную точку провести лишь одну прямую, перпендикулярную данной прямой.

Случай 2. Точка A лежит на прямой a.

Тогда, как показано в п. 2.3, через прямую a проходит бесконечно много плоскостей. В каждой из них через точку A можно провести прямую, перпендикулярную прямой a (рис. 54). Итак, во втором случае задача имеет бесконечное множество решений.

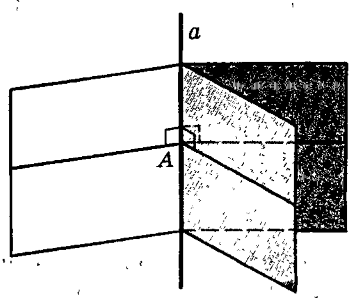


Рис. 54

В дальнейшем будет доказано, что все эти прямые лежат в одной плоскости и заполняют ее, т. е. через каждую точку плоскости проходит такая прямая.

5.3. Конструктивные и неконструктивные доказательства существования

▲ Говоря о построениях в элементарной геометрии (как в пространстве, так и на плоскости), следует отметить еще одну их особенность — алгоритмичность. Это означает, что искомое построение (доказательство существования некоторой фигуры) сводится к конечному числу последовательно осуществляемых шагов, каждый из которых есть одно из нескольких заранее заданных простейших построений. Эти простейшие построения, часто называемые «постулатами построения», есть, конечно, тоже некоторые утверждения существования. Они могут быть аксиомами или самыми первыми следствиями аксиом, а также утверждениями, имеющими общематематический характер.

Для построений в пространстве обычно принимаются такие условия («постулаты построения»):

1. *Если задана фигура, то о каждой точке пространства можно сказать, принадлежит ли она этой фигуре или не принадлежит.*

Другими словами, можно выбирать в пространстве точки, как принадлежащие данной фигуре, так и не принадлежащие данной фигуре.

2. *Если построены две фигуры, то считается построенным их пересечение* (как прямая в пересечении двух плоскостей).

3. *Если даны две точки, то через них можно провести прямую.*

4. *Если даны три точки, то через них можно провести плоскость. И точно так же можно провести плоскость через прямую и точку и через две пересекающиеся или параллельные прямые.*

5. *На каждой плоскости можно проводить любые построения планиметрии.*

Конечно, проводя в дальнейшем то или иное построение, мы не всегда будем доводить его именно до этих пяти основных, первоначальных построений, а будем ссылаться на уже выполненные построения (как и при доказательствах теорем ссылаются не только на аксиомы, но и на уже доказанные теоремы).

В элементарной геометрии, как в планиметрии, так и в стереометрии, теоремы существования доказываются построениями или, как еще говорят, конструктивно. Такая традиция идет от древнегреческой геометрии, где рассматривались построения лишь с помощью циркуля и линейки, т. е. доказывались теоремы существования, опирающиеся на следующие постулаты:

1. *Через любые две данные точки можно провести прямую* (возможность применения линейки).

2. *Из любого центра можно описать окружность любым радиусом* (возможность применения циркуля).

В истории геометрии большую роль сыграли исследования о разрешимости трех знаменитых задач древности на построение (с помощью циркуля и линейки): удвоение куба, квадратура круга, трисекция угла. Лишь в XIX в. было доказано, что эти задачи не решаются конструктивно циркулем и линейкой. В то же время ясно, что существует куб, объем которого вдвое больше объема данного куба, существует квадрат, площадь которого равна площади данного круга, и существуют лучи, разбивающие данный угол на три равных угла.

Доказательства этих утверждений неконструктивны в том смысле, что не осуществляются конечным числом шагов и требуют применения предельного перехода. На каждом из осуществляемых в доказательстве шагов задача решается приближенно с той или иной точностью.

Если же говорить о реальном построении (например, о делении циркулем угла, или, что равносильно, дуги окружности, на три равные части), то оно всегда осуществляется с точностью, допустимой данным реальным инструментом. ▼

5.4. О построении пирамид и призм

▲ Построить пирамиду (а значит, и решить вопрос о ее существовании) можно так.

Строим в какой-нибудь плоскости α какой-либо многоугольник Q — основание пирамиды (рис. 55, *а*). Берем любую точку P, не лежащую в плоскости α, и соединяем ее отрезками со всеми вершинами многоугольника. Эти отрезки будут боковыми ребрами пирамиды. Вместе со сторонами многоугольника Q они образуют каркас из ребер пирамиды. Но пока еще не построены сами боковые грани. Они получаются так.

Пусть AB — какая-либо сторона многоугольника Q (рис. 55, *б*). Через три точки P, A, B проходит плоскость (единственная, так как точки P, A, B не лежат на одной прямой). Отрезки PA, PB, AB лежат в одной плоскости. Они ограничивают треугольник PAB. Он и будет боковой гранью пирамиды. Так строим все боковые грани пирамиды. Вместе с многоугольником Q они ограничат в пространстве пирамиду T с вершиной P и основанием q (рис. 55, *в*).

Тем самым доказана теорема: *какой бы многоугольник Q и точку P, не лежащую в его плоскости, ни задать, существует, и притом единственная, пирамида с основанием Q и вершиной P.*

Напомним, что пирамида называется правильной, если ее основание — правильный многоугольник, а все ее боковые ребра равны. Поэтому у правильной пирамиды все боковые грани — равные равнобедренные треугольники (рис. 56). Спрашивается: а как построить правильную пирамиду? Где надо взять точку P в проведенном выше построении пирамиды, чтобы она получилась правильной? А может быть, правильную пирамиду построить нельзя, таких пирамид не существует? Однако мы укажем в главе V, как строить правильные пирамиды точно геометрически и, стало быть, в практике с любой доступной степенью точности.

Перейдем к призмам. Призму можно построить так. Возьмем в некоторой плоскости α какой-либо n-угольник, например пятиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5$. Из вершины A_1 проведем какой-нибудь отрезок A_1B_1, не лежащий в плоскости α (рис. 57, *а*). Через точки A_1, A_2, B_1 проходит плоскость (единственная). В ней построим параллелограмм с противоположными сторонами A_1B_1 и A_2B_2.

Далее аналогично построим параллелограмм со сторонами A_2B_2 и A_3B_3 и т. д. (рис. 57, *б*). Про-

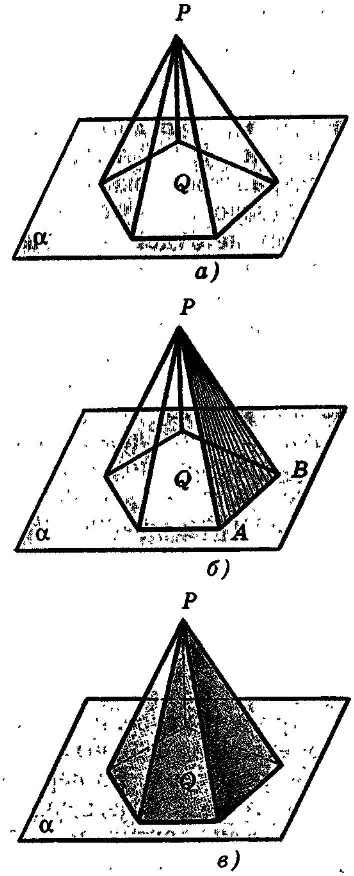


Рис. 55

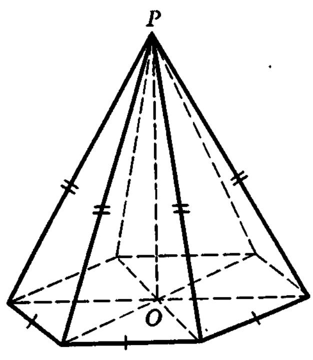


Рис. 56

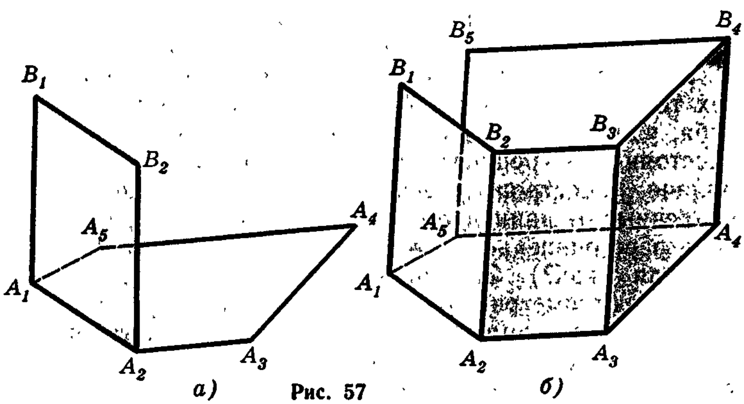


Рис. 57

должая, дойдем до параллелограмма со стороной A_5B_5. Отрезок A_1B_1 уже проведен. Вместе с отрезком A_5B_5 они составят стороны последней, пятой боковой грани. Построенные боковые грани $A_1B_1B_2A_2$, $A_2B_2B_3A_3$, ..., $A_5B_5B_1A_1$ вместе с основаниями $A_1A_2A_3A_4A_5$ и $B_1B_2B_3B_4B_5$ ограничат в пространстве призму.

Однако почему отрезки A_5B_5 и A_1B_1 параллельны? Почему не будет хотя бы небольшого «перекоса» — ведь тогда призма не получится? Вы уже можете ответить на этот вопрос.

И еще вопрос: почему все отрезки B_1B_2, B_2B_3, ..., B_5B_1 будут лежать обязательно в одной плоскости?

Дальше мы получим ответ и на этот вопрос и докажем, что построение проходит: все отрезки B_1B_2, ..., B_5B_1 лежат в одной плоскости. Поэтому если практическое построение призмы делается достаточно точно (например, ставятся столбы или колонны), то никаких перекосов быть не должно. ▼

5.5. Построения на чертежах пространственных фигур и реальные построения

Кроме построений — теорем существования в стереометрии, возможны еще два вида задач, связанных с построениями. Во-первых, задачи на рисунке или на чертеже. Таковы задачи на сечения многогранников или других тел. Мы не строим на самом деле само сечение, а только изображаем его на рисунке или чертеже, который у нас уже есть. Такие построения осуществляются как планиметрические с учетом аксиом и теорем стереометрии и правил изображений. Задачи такого типа постоянно решают в черчении и в конструкторской практике.

Во-вторых, задачи на построение на поверхностях тел. Задача: «Построить точки на поверхности куба, удаленные от данной его вершины на данное расстояние» — решается с помощью циркуля (как?). Задача: «Построить точки на поверхности шара, удаленные от данной точки его поверхности на данное расстояние» — также решается с помощью циркуля (как?). Задачи такого типа решают не на уроках геометрии — их постоянно решает разметчик на заводе, разумеется, с точностью, которой позволяют добиться его инструменты. Но, решая такие задачи, он опирается на геометрию.

Задачи

Разбираемся в решении

5.1. Докажите, что существует точка, равноудаленная от всех вершин правильного тетраэдра. Обобщите это утверждение.

Указания к решению.

Пусть $PABC$ — правильный тетраэдр, а точка Q — центр его основания. 1) Докажите, что углы PQA, PQB и PQC равны.

2) Возьмите любую точку X на отрезке PQ и докажите, что расстояния XA, XB, XC равны.

3) Сравните расстояния XA и XP при двух положения точки X: когда она совпадает с P и когда она совпадает с Q. Используйте соображения непрерывности.

Нужное нам положение точки X на отрезке PQ можно установить с помощью вычислений. Прежде всего обозначьте ребро тетраэдра, например, через d (можно было бы его считать равным 1 или 2). Вычислите $|AQ|$. Теперь можно доказать, что треугольник PAQ прямоугольный. Для этого из треугольника PAK (точка K — середина ребра BC) найдите угол PAK (вычислив его косинус). Потом из треугольника PAQ установите, что угол PQA прямой. Точка X, находясь на отрезке PQ, равноудалена от вершин A, B, C — это мы уже доказали. Считая расстояние от точки X до точки P неизвестным, составьте и решите уравнение для его нахождения.

Обобщение трудностей не вызовет, но при его доказательстве вас, вероятно, будет поджидать сюрприз.

Как вы думаете, единственна ли такая точка? Как вы обоснуете свое предположение?

Дополняем теорию

5.2. Даны две скрещивающиеся прямые и точка, которая им не принадлежит. Постройте: а) плоскость, проходящую через данную точку и пересекающую обе данные прямые; б) прямую, проходящую через данную точку и пересекающую обе данные прямые.

Рисуем

5.3. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Нарисуйте прямую, которая проходит: а) через точку C и перпендикулярна (C_1D_1); б) через точку C_1 и перпендикулярна (BD); в) через точку B_1 и перпендикулярна (AC); г) через точку B и перпендикулярна (B_1D).

5.4. Пусть $PABC$ — правильный тетраэдр. Нарисуйте прямую, которая проходит: а) через точку P и перпендикулярна (AC); б) через точку C и перпендикулярна (PB); в) через точку K — середину отрезка BC — и перпендикулярна (PA); г) перпендикулярна прямым (PC) и (AB).

Доказываем

5.5. Даны три круга. Постройте плоскость, которая делит пополам каждый из них.

5.6. Постройте плоскость, которая: а) не проходит через данную точку; б) проходит только через одну из двух данных точек; в) не проходит ни через одну из двух данных точек.

5.7. Даны три попарно скрещивающиеся прямые. Постройте плоскость, которая пересекает: а) каждую данную прямую; б) ровно две из них.

5.8. Имеется n попарно скрещивающихся прямых. Докажите, что существует прямая, которая пересекает: а) ровно две из них: б) ровно одну из них.

5.9. Постройте четыре прямые, попарно не лежащие в одной плоскости. Решите задачу в общем случае, т. е. для любого числа прямых, большего трех.

5.10. Даны три попарно скрещивающиеся прямые. Постройте прямую, которая их пересекает.

5.11. Даны пять точек. Докажите, что существует такая плоскость, с каждой стороны от которой находится по равному числу данных точек. Обобщите эту задачу.

Исследуем

5.12. Дано n точек. Существует ли такая плоскость, которая не проходит ни через одну из них?

Рассуждаем

5.13. Сформулируйте следующие утверждения как теоремы существования: а) из трех отрезков можно составить треугольник; б) у параллелограмма есть центр симметрии; в) у каждого четырехугольника есть центр симметрии; г) у прямоугольника есть ось симметрии; д) около треугольника можно описать окружность; е) около каждого четырехугольника можно описать окружность; ж) в треугольник можно вписать окружность; з) в каждый четырехугольник можно вписать окружность.

Верны ли эти теоремы? Если они верны, то будет ли единственным тот объект, существование которого утверждается в теореме?

5.14. Сформулируйте следующие утверждения как теоремы существования: а) аксиому 2; б) вне любой плоскости есть точки; в) у любых двух прямых есть общая точка; г) через прямую и точку можно провести плоскость; д) через две прямые проходит плоскость; е) через каждую точку можно провести прямую, перпендикулярную данной.

Верны ли теоремы? Если они верны, то можно ли их сформулировать как теоремы существования и единственности?

§ 6. Об аксиомах

6.1. Определение основных понятий

Изучение какого-либо предмета в математике обычно начинается с его определения. На этой основе устанавливаются дальнейшие его свойства, выражаемые в теоремах. Мы начали изучение пространства — оно составляет предмет стереометрии.

Изучение стереометрии можно начать таким определением пространства:

Пространством в элементарной геометрии называется множество, элементы которого называются точками и в котором выполнены следующие пять аксиом...

Затем сформулировать те пять аксиом стереометрии, которые даны в § 1. (Мы говорим о пространстве «в элементарной геометрии», потому что термин «пространство» употребляется также в других смыслах.)

Итак, *пространство — это множество, в котором выполняются аксиомы стереометрии. Элементы этого множества называются точками.*

Последняя фраза представляет собой не что иное, как определение точки в стереометрии. Далее можно дать определения и других основных объектов стереометрии.

Расстояниями называются величины, соответствующие каждым двум точкам пространства так, что выполнены аксиомы стереометрии.

Плоскостью в пространстве называется содержащаяся в нем фигура, на которой выполнена планиметрия.

Прямой называется фигура на плоскости, для которой вместе с другими такими фигурами выполняются аксиомы планиметрии.

Пояснение. Мы определили точку не саму по себе, а совместно с другими точками как элемент образуемого ими множества с его структурой, описанной аксиомами.

Точно так же прямая (или плоскость) — это множество точек, удовлетворяющее вместе с другими такими множествами перечисленным аксиомам. Так же как, скажем, класс — это множество учащихся, входящих определеннным образом в структуру школы. Для всякой организации определения возможны только через взаимные отношения ее элементов и частей; в частности для такой «организации», как пространство.

Такие определения, когда какие-либо понятия определяются не по отдельности, а через взаимные отношения, можно назвать соотносительными. Например, данный человек — король лишь постольку, поскольку есть люди, являющиеся его подданными. Король и подданные определяются их взаимным отношением.

6.2. Роль аксиом

Совокупность аксиом, или, как принято говорить, система аксиом стереометрии, дает определение ее предмета — пространства и вместе с ним основных ее понятий. Вообще система аксиом любой математической теории дает определение ее предмета и основных понятий. Эти определения называются аксиоматическими, чтобы отличить их от обычных определений.

В обычном определении используются только такие понятия, которые заранее известны. В аксиоматическом же определении фигурируют такие понятия, которые только и определяются самими же аксиомами, как, например, прямые — это такие множества, которые удовлетворяют соответствующим аксиомам. Конечно, в аксиомах фигурируют такие понятия, считающиеся заранее известными, как, скажем, понятие множества, или такие понятия, как «два», «три», «существует» и др.

Замечание. Нередко говорят, что основные понятия, например «точка», «прямая», принимаются без определений. Это значит, что они принимаются без предварительных определений, их определение содержится в формулировках аксиом. Аксиомы играют для них роль, как говорят, неявных определений. Выше мы выразили эти определения явно.

Основные понятия теории — это те, определения которых даются самими ее аксиомами.

С другой стороны, понятия «точка», «прямая» и другие имеют наглядный смысл, не математически точный, но реальный (хотя и идеализированный воображением). Аксиомы служат описанием свойств и взаимоотношений этих «вещей», т. е. того реального, что отражается в основных понятиях геометрии. Именно так мы и излагали аксиомы стереометрии, поясняя их наглядный практический смысл.

В общем аксиомы стереометрии, как и планиметрии, имеют двоякий смысл: абстрактных определений и наглядных описаний. Так же все теоремы стереометрии имеют двойной смысл: абстрактно логический и наглядный. Всякое предложение стереометрии нужно так и понимать двояко: в его наглядном содержании и как чисто логическое следствие аксиом. Это можно видеть на всех выводах § 2—4.

6.3. Условность аксиом

Одному и тому же предмету можно давать разные определения, беря за исходные разные его свойства, лишь бы они были равносильны. Говоря, что два определения равносильны, мы имеем в виду, что из свойств, взятых за исходные в одном определении, следуют свойства, положенные в основу другого определения, и наоборот.

Например, вместо обычного определения окружности можно принять такое: окружность есть множество вершин прямоугольных треугольников с общей гипотенузой, лежащих в одной плоскости. Возможно еще много других определений. Их выбор зависит от того, какое определение проще, естественнее или лучше ведет к дальнейшим выводам.

Совершенно так же в основании стереометрии, в определении ее предмета, как и всякой другой теории, можно принимать разные системы аксиом, лишь бы они были равносильны. Выбор тех или иных аксиом диктуется соображениями простоты и наглядности, легкостью получения дальнейших выводов и др. Об этом говорилось в начале главы I.

Более того, наши аксиомы 3 и 4 можно вывести из остальных. Покажем, например, как выводится из аксиом 1, 2 утверждение, что каждая прямая, имеющая с плоскостью две общие точки, лежит в этой плоскости.

Пусть некоторая прямая a имеет с плоскостью α две общие точки A и B. Прямая a лежит в некоторой плоскости β, поскольку, вводя прямые в стереометрии, мы ввели их как прямые в плоскостях. Если $\alpha=\beta$, то требуемое утверждение доказано. Пусть $\beta\neq\alpha$. Тогда по аксиоме 2 пересечение плоскостей

α и β является прямой, лежащей как в α, так и в β и проходящей через точки A и B. Но в плоскости β по аксиоме планиметрии есть лишь одна прямая, проходящая через A и B,— это прямая a. Поэтому она является и прямой, по которой пересекаются α и β, т. е. прямая a лежит в плоскости α.

Аксиому 3 мы вывели из аксиом 1, 2. Вывод аксиомы 4 значительно сложнее, и мы его не приводим.

Итак, в системе стереометрии можно было бы оставить лишь аксиомы 1, 2, 5. Такая система аксиом стереометрии проще, но зато нужные выводы получаются из нее сложнее. Впрочем, любая теорема может быть принята за аксиому. Есть, например, изложения, в которых за аксиому принимается первый признак равенства треугольников или даже теорема Пифагора.

Возьмем, например, утверждение: через каждые две пересекающиеся прямые проходит плоскость и притом только одна.

Само по себе это не теорема, не аксиома, а просто верное утверждение стереометрии. Оно становится аксиомой или теоремой в зависимости от сделанного выбора. У нас это теорема, в другом изложении может быть аксиомой.

В общем выбор аксиом — дело условия: одно и то же утверждение теории может быть по выбору принято за аксиому, а может выступать в качестве теоремы, когда приняты другие аксиомы.

Само слово «аксиома» по происхождению греческое и означает в переводе «достойное признания». В обычной речи аксиомой и называют утверждение, достойное признания ввиду его очевидности, несомненности и т. п. Говорят, например, о моральных аксиомах типа «не делай подлостей». Словом, в обычном понимании аксиома — это нечто безусловное. Но в математике аксиомы, как мы видим, условны. Они «достойны признания» не сами по себе, а потому, что на них строится достойная — содержательная, важная — теория.

При условности аксиом сама стереометрия — совокупность ее утверждений с логическими связями — не зависит от каких-либо условий. Так, достопримечательности города с системой улиц и сообщений между ними существуют независимо от выбора туриста. Но турист может выбирать тот или иной исходный пункт, чтобы пройти по всем достопримечательностям. Так и мы, выбрав исходный пункт — нашу систему аксиом, отправляемся по логическим доказательствам, как по улицам, на ознакомление с достопримечательностями стереометрии. А в ней много примечательного и интересного, хотя изучение ее и требует труда... Но ведь мало что значительное оказывается легко доступным.

Подведем итог. Коротко говоря, **аксиомой называется утверждение, принятое без доказательства, а теоремой — которое доказывается.**

Подробнее же надо сказать так:

Аксиома — это утверждение, входящее в систему аксиом, т. е. в совокупность утверждений, которые образуют определение предмета теории и ее основных понятий. Из них путем логических выводов получаются другие утверждения теории — **теоремы**. **Основными** называются понятия теории, которым не дается предварительных определений, но определения которых даются самими аксиомами (как даны выше определения точек, расстояний и т. д.).

Всякая теория допускает разные системы аксиом и основных понятий. При замене одной аксиомы другой первая превращается в теорему, а заменившее ее утверждение становится из теоремы аксиомой.

Дополение к параграфу 6

Аксиоматика евклидовой планиметрии

Приведем один из возможных вариантов евклидовой планиметрии. Формулируя аксиоматику евклидовой планиметрии, считаем известными арифметику действительных чисел и понятие положительной величины (см. § 1).

Основные объекты планиметрии: **точки и прямые.**

Основные отношения: **принадлежности** (для точки и прямой) и **между** (для трех точек, лежащих на одной прямой).

Система аксиом разбита на пять групп.

I группа. Аксиомы принадлежности.

I.1. Через каждые две точки проходит прямая и притом только одна.

I.2. На каждой прямой существуют по крайней мере две точки. Существуют по крайней мере три точки, не лежащие на одной прямой.

II группа. Аксиомы порядка.

II.1. Из каждых трех точек на прямой одна и только одна лежит между двумя другими.

После этой аксиомы вводится понятие отрезка.

II.2. Каждая прямая разбивает плоскость на две полуплоскости. (Определение полуплоскости дано в п. 1.3.)

После этой аксиомы вводится понятие луча и доказывается, что *каждая точка, лежащая на прямой, разбивает эту прямую на два луча.*

III группа. Аксиомы расстояния.

III.1. Каждым двум точкам ставится в соответствие положительная величина, которая называется расстоянием между этими точками.

Расстояние между точками A и B обозначается $|AB|$ или $|BA|$.

III.2. Для любого расстояния r на заданном луче с началом O существует точка A, для которой $|OA|=r$.

Эту аксиому можно назвать *аксиомой откладывания отрезка* и сформулировать так: на любом луче от его начала можно отложить отрезок любой данной длины.

III.3. Если точка B лежит между точками A и C, то $|AB|+|BC|=|AC|$ *(аксиома аддитивности длины отрезка).*

III.4. Для любых трех точек A, B, C имеет место неравенство

$$|AB|+|BC|\geqslant|AC| \qquad (1)$$

(неравенство треугольника.) **Равенство в (1) имеет место лишь тогда, когда точка B лежит между точками A и C.**

После группы аксиом расстояния вводится понятие движения как отображения, сохраняющего расстояния.

В оставшихся двух группах всего по одной аксиоме.

IV группа. Аксиома подвижности.

Пусть луч l с началом в точке O лежит на границе полуплоскости α, а луч l' с началом в

точке O' лежит на границе полуплоскости α'. Тогда существует такое движение, которое переводит точку O в O', луч l в l' и полуплоскость α в α'.

V группа. Аксиома принадлежности Евклида.

Для каждой прямой a и каждой точки A, не лежащей на прямой a, существует не более одной прямой, проходящей через точку A и не пересекающей прямую a.

Задачи к главе I

Рисуем

I.1. На поверхности тетраэдра даны: а) две точки. Нарисуйте точки пересечения прямой, проходящей через эти точки, с плоскостями граней тетраэдра; б) три точки. Нарисуйте прямую пересечения плоскости, проходящей через эти три точки, с плоскостями граней тетраэдра.

I.2. Точки K и L лежат на гранях PAC и PBC тетраэдра $PABC$. Нарисуйте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через (KL) и пересекающей плоскость основания по прямой, параллельной (AB).

I.3. Точки K, L, M лежат на боковых гранях тетраэдра $PABC$, точка N лежит на его основании. Нарисуйте точку пересечения плоскости KLM и прямой PN.

I.4. Дана четырехугольная пирамида $PABCD$. Нарисуйте ее сечение плоскостью: а) APQ, где точка Q — точка пересечения диагоналей основания; б) ABK, где точка K лежит внутри ребра PD; в) AKL, где точка K лежит внутри ребра PD, точка L лежит внутри ребра PC; г) KLM, где точка K лежит внутри ребра PA, точка L лежит внутри ребра PD, точка M лежит внутри ребра PC; д) KLM, где точка K лежит внутри ребра PB, точка L лежит внутри ребра PD, точка M лежит внутри основания; е) KLM, где точка D лежит внутри отрезка AK, точка P лежит внутри отрезка BL, точка M лежит внутри отрезка AB; ж) KLM, где точка D лежит внутри отрезка AK, точка P лежит внутри отрезка BL, точка A лежит внутри отрезка MB; з) проходящей через (AD) и точку L, где точка L лежит внутри отрезка PQ; и) (AD) и точку M, где точка M лежит внутри медианы, проведенной в треугольнике PCD из точки P.

I.5. Нарисуйте: а) пять плоскостей, из которых каждые две имеют общую прямую, а каждые три — общую точку; б) девять плоскостей, из которых каждые две имеют общую прямую.

Планируем

I.6. Какие вы произведете измерения на поверхности тетраэдра, чтобы вычислить: а) длину отрезка, соединяющего середины его скрещивающихся ребер; б) длину отрезка, соединяющего вершину с данной точкой внутри основания?

Находим величину

I.7. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, точка K — середина ребра AA_1. Нарисуйте прямые, проходящие через точку K и пересекающие: а) (CC_1) и (B_1D_1); б) (BC) и (D_1C_1); в) (DC) и (B_1C_1); г) (BD) и (A_1C_1). Вычислите длины отрезков построенных прямых, находящихся между данными прямыми, в кубе с ребром 1.

Ищем границы

I.8. В тетраэдре $PABC$ все ребра, кроме PC, имеют длину d. Пусть $|PC|=x$. Выразите как функцию от x расстояния между серединами его противоположных ребер. В каких границах они заключены?

I.9. Попытайтесь вычислить наибольшее расстояние между двумя точками в многогранниках такого вида: а) правильном тетраэдре с ребром 1; б) правильной четырехугольной пирамиде со стороной основания 2 и боковым ребром 3; в) правильной треугольной призме с ребром основания 1 и боковым ребром 2; г) прямоугольном параллелепипеде с ребрами 1, 2, 3.

I.10. На поверхности куба лежат стороны правильного треугольника с наибольшей возможной площадью. Сделайте соответствующий рисунок. Решите аналогичную задачу для квадрата. Как расположен в кубе круг с наибольшей возможной площадью? Можете ли вы это доказать?

Доказываем

I.11. Каждые две из трех плоскостей пересекаются по различным прямым. Две из этих прямых пересекаются. Докажите, что пересекаются все три прямые.

I.12. Дано n плоскостей. Докажите, что: а) существуют точки, не лежащие в них; б) существует плоскость, пересекающая каждую из них; в) существует прямая, пересекающая каждую из них.

I.13. Точка K — середина ребра PA тетраэдра $PABC$, точка L — середина ребра BC. Докажите, что

$$|KL| < \frac{|PB|+|AC|}{2}.$$

I.14. Докажите, что существуют: а) такие 4 точки в пространстве, что все расстояния между ними будут равны; б) такие 5 точек в пространстве, что 8 попарных расстояний между ними будут равны. Как расположить в пространстве 6 точек, чтобы число попарно равных расстояний между ними было равно 12? Как расположить в пространстве 7 точек, чтобы число попарно равных расстояний между ними было равно 15?

I.15. Докажите, что существуют такие 4 точки в пространстве, что все расстояния между ними различны. Обобщите это утверждение.

Исследуем

I.16. Может ли сечение правильного тетраэдра быть: а) правильным треугольником; б) равнобедренным (но не равносторонним) треугольником; в) тупоугольным треугольником; г) прямоугольным треугольником; д) квадратом; е) прямоугольником (но не квадратом)?

I.17. Можно ли в сечении правильной четырехугольной пирамиды получить: а) равносторонний треугольник; б) квадрат; в) трапецию; г) пятиугольник; д) шестиугольник; е) правильный пятиугольник?

I.18. Две плоскости пересекаются. Третья плоскость пересекает каждую из них. Три прямые пересечения данных плоскостей не имеют общей точки. Будет ли третья плоскость пересекать общую прямую двух данных плоскостей?

I.19. Имеется n плоскостей. Имеют ли они все общую точку, если: а) каждые две из них имеют общую точку; б) каждые три из них имеют общую точку?

Участвуем в олимпиаде

I.20. Нарисуйте сечение, проходящее через вершину правильного тетраэдра. Найдите его наименьшую сторону.

Итоги главы I

В этой главе мы начали дедуктивное построение стереометрии: сформулировав в § 1 аксиомы стереометрии, мы затем, опираясь на них, в § 2 доказали первые теоремы о способах задания прямых и плоскостей в пространстве, а в § 3 изучили взаимное расположение прямых в пространстве.

Основными результатами этих трех параграфов можно считать следующие утверждения: прямую в пространстве можно задать двумя ее точками (теорема 2.1), а также как пересечение двух плоскостей (аксиома 2); плоскость в пространстве можно задать:

1) тремя ее точками, не лежащими на одной прямой (теорема 2.2);

2) прямой и не лежащей на ней точкой (теорема 2.3);

3) двумя пересекающимися прямыми (теорема 2.4);

4) парой параллельных прямых (замечание 1 в п. 3.2).

Чаще всего именно эти предложения, а не аксиомы мы используем в дальнейших выводах.

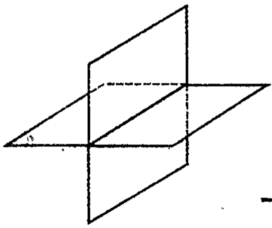
Подробным разговором о дедуктивном (аксиоматическом) построении геометрии (и не только геометрии) мы завершили в § 6 эту главу.

В главе I мы учились также рисовать пространственные фигуры, ознакомились в § 4 с параллельным проектированием пространственных фигур на плоскость, с правилами изображения фигур в параллельной проекции. Уметь наглядно и правильно рисовать пространственные фигуры очень важно для успешного овладения стереометрией.

Наконец, в § 5 мы проанализировали теоремы § 2 и § 3, выяснили, что в них доказаны как утверждения о существовании некоторых объектов, так и утверждения о их единственности. А задачи на построение фигур в геометрии и являются предложениями (теоремами) о существовании этих фигур, доказываемыми конструктивно. Как это можно осуществить, проиллюстрировано для пирамид и призм.

Первая глава трудных теорем не содержит, на нее можно смотреть как на «разминку» в начале изучения стереометрии.

Глава II



Перпендикулярность и параллельность прямых и плоскостей

Эта глава самая важная (и трудная) в курсе 10-го класса. В ней изучаются четыре отношения перпендикулярности и параллельности прямых и плоскостей в пространстве: сначала речь пойдет о перпендикулярности прямой и плоскости (§ 7) и перпендикулярности плоскостей (§ 8), а затем о параллельности плоскостей (§ 9) и параллельности прямой и плоскости (§ 10).

Самым важным из этих отношений является перпендикулярность прямой и плоскости. Опуская перпендикуляры из точек на плоскость, мы проектируем пространственные фигуры в плоские и тем самым сводим стереометрические задачи к планиметрическим. Именно это простейшее, но и важнейшее из стереометрических построений лежит в основе ортогонального проектирования и начертательной геометрии, о которых рассказано в § 11.

Заметим, что и Евклид, давая определения в стереометрических книгах «Начал», сразу же после определения 1 «Тело есть то, что имеет длину, ширину и глубину» и определения 2 «Граница же тела — поверхность» в определениях 3 и 4 говорит о перпендикулярности прямой и плоскости и перпендикулярности плоскостей.

Изучать параллельность плоскостей значительно проще после того, как изучена перпендикулярность прямой и плоскости. Например, легко строится плоскость, проходящая через заданную точку и параллельная заданной плоскости.

В этой главе по сравнению со всеми другими главами много теорем, но все эти теоремы весьма наглядны: их можно себе представлять как предложения о вертикалях и горизонталях и иллюстрировать на окружающих нас предметах. Эти иллюстрации идут, как правило, от строительства, и потому на всю главу II можно смотреть как на основы «строительной геометрии».

§ 7. Перпендикулярность прямой и плоскости

7.1. Определение перпендикулярности прямой и плоскости. Перпендикуляр и наклонная

Представление о прямых, или, вернее, об отрезках, перпендикулярных плоскости, дают вертикально стоящие столбы — они перпендикулярны поверхности земли, натянутый шнур, на котором висит лампа, перпендикулярен потолку, ребро угла комнаты перпендикулярно полу, нижний край прямоугольной двери в плоскости пола перпендикулярен вертикальному косяку при всех положениях двери (рис. 58). Этим свойством и определяется перпендикулярность прямой и плоскости.

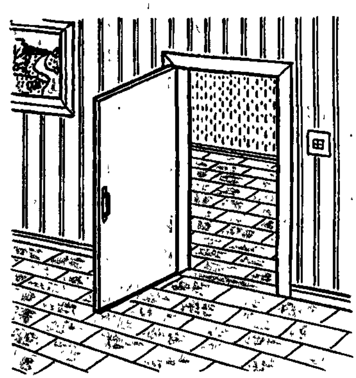


Рис. 58

Определение.

Прямая называется перпендикулярной плоскости, если она пересекает эту плоскость и перпендикулярна всякой прямой в этой плоскости, проходящей через точку пересечения (рис. 59).

Говорят также, что *плоскость перпендикулярна прямой* или что они *взаимно перпендикулярны*. Для взаимно перпендикулярных прямой a и плоскости α применяют обозначение $a \perp \alpha$ или $\alpha \perp a$.

О луче или отрезке говорят, что он перпендикулярен плоскости, если он содержится в прямой, перпендикулярной этой плоскости. Если отрезок перпендикулярен плоскости и его конец лежит в этой плоскости, то он называется **перпендикуляром к данной плоскости.**

Отрезок, имеющий с плоскостью одну общую точку — конец отрезка, но не перпендикулярный данной плоскости, называется **наклонной к плоскости.**

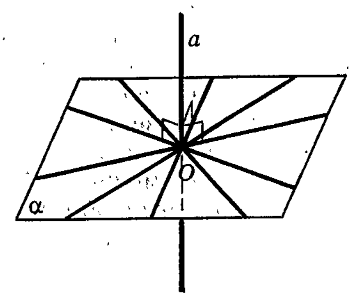


Рис. 59

Если из одной точки A, не лежащей в плоскости α, проведены к α перпендикуляр AB и наклонная AC (рис. 60), то $AB < AC$, т. е. *перпендикуляр короче наклонной,* если они проведены из одной и той же точки к одной и той же плоскости. Действительно, в прямоугольном треугольнике ABC катет AB короче гипотенузы AC.

Итак, перпендикуляр AB является **кратчайшим** среди всех отрезков, соединяющих точку A с точками плоскости α.

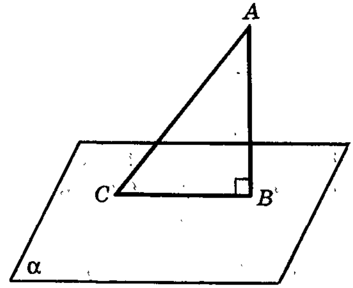


Рис. 60

Столь же просто можно решить вопрос о единственности перпендикуляра, проведенного из данной точки к данной плоскости. А именно докажем, что *через каждую данную точку проходит не более одной прямой, перпендикулярной данной плоскости.*

Действительно, допустим, что через некоторую точку A проходят две прямые a и b, перпендикулярные одной плоскости α. Проведем через них плоскость β (рис. 61). Эта плоскость β пересекает плоскость α по некоторой прямой c. Так как $a \perp \alpha$ и $b \perp \alpha$, то обе прямые a и b перпендикулярны прямой c. Но из планиметрии известно, что это невозможно. Значит, через точку A проходит не более одной прямой, перпендикулярной плоскости α.

Мы решим вопрос и о существовании взаимно перпендикулярных прямых и плоскостей. Но его решение не просто и будет дано в п. 7.4, 7.6.

Длиной перпендикуляра, опущенного из самой высокой точки предмета на его основание, измеряют высоту предмета. Так, **высотой пирамиды** называется перпендикуляр, опущенный из вершины пирамиды на плоскость ее основания, а также его длина.

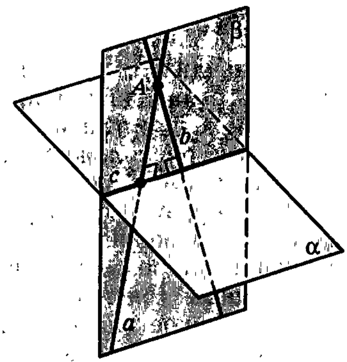


Рис. 61

7.2. О значении перпендикуляра

▲ Перпендикуляр к плоскости играет очень важную роль и помимо того, что он является кратчайшим среди всех отрезков, идущих от данной точки до точек плоскости. Это можно до некоторой степени видеть из ранее приведенных примеров. Но поясним еще его значение.

Положение плоскости в пространстве можно задавать, указывая перпендикулярную ей прямую и ту точку, в которой она эту прямую пересекает. Плоскость «насаживается» на перпендикулярную ей прямую подобно листу картона на спицу (рис. 62).

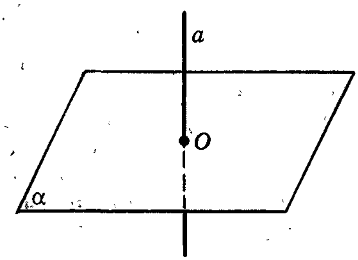


Рис. 62

Важнейшее свойство перпендикуляра состоит в том, что плоскость расположена симметрично относительно него. Все лучи, исходящие из основания перпендикуляра к плоскости и лежащие в ней, образуют с ним равные — прямые — углы, а для наклонной это не так (рис. 63). При вращении вокруг перпендикуляра плоскость совмещается сама с собой: колесо должно быть насажено на ось так, чтобы его плоскость была перпендикулярна оси. Прямоугольник со стороной, перпендикулярной плоскости, можно вращать вокруг этой стороны, и другая сторона будет скользить по плоскости. Это хорошо видно на правильно навешенной двери. Если ее край не вертикален, дверь задевает пол.

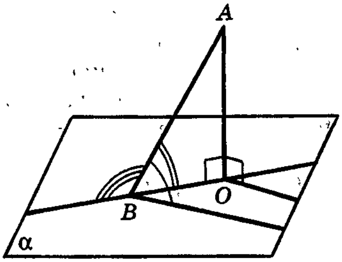


Рис. 63

Вот примеры из физики: давление жидкости или газа на стенку сосуда направлено по перпендикуляру к стенке (рис. 64), так же как давление груза на опору направлено по перпендикуляру к ней (рис. 65).

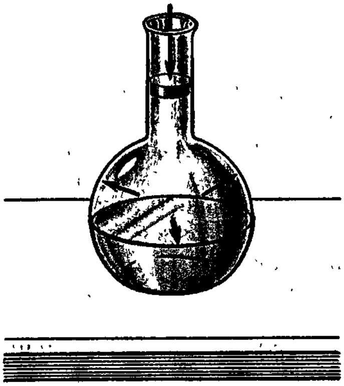


Рис. 64

Перпендикуляр к поверхности фигурирует в законах отражения и преломления света. Так, закон отражения гласит: луч падающий и луч отраженный расположены в одной плоскости с перпендикуляром к поверхности зеркала в точке падения и образуют с ним равные углы; «угол падения» и «угол отражения» — это углы между указанными перпендикуляром и лучом падающим и лучом отраженным (рис. 66).

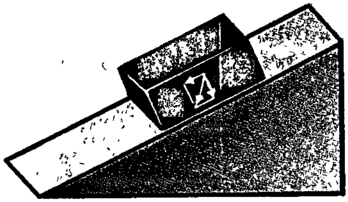


Рис. 65

Но главное значение перпендикуляра — это его роль в технике и во всем нашем обиходе. Мы, можно сказать, окружены перпендикулярами: ножки стола перпендикулярны полу, край шкафа перпендикулярен стене и т. д. Вертикаль перпендикулярна горизонтальной плоскости. Помимо установки мачт, столбов и пр., это играет главную роль в строительстве зданий: междуэтажные перекрытия укладывают перпендикулярно возведенным стенам или столбам каркаса здания. Как увидим в следующем параграфе, параллельность плоскостей связана с наличием у них общих перпендикуляров. Вообще перпендикулярность и параллельность прямых и плоскостей — существенный элемент в строительстве, так что учение о перпендикулярах и параллелях можно назвать основами «строительной» геометрии. ▼

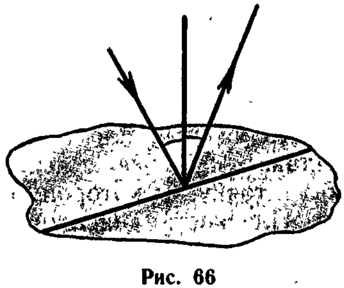


Рис. 66

7.3. Основной признак перпендикулярности прямой и плоскости

Основную роль в изучении перпендикулярности прямых и плоскостей играет следующая теорема.

Теорема 7.1 *(признак перпендикулярности прямой и плоскости)*.

Прямая, перпендикулярная двум пересекающимся прямым, лежащим в данной плоскости, перпендикулярна этой плоскости.

Пояснение. Понятно значение этой теоремы: достаточно установить (или обеспечить) перпендикулярность прямой только двум прямым в данной плоскости, как она будет перпендикулярна всем пересекающим ее прямым, лежащим в этой плоскости.

Вот пример: раскройте книгу и поставьте ее на стол (рис. 67). Корешок книги перпендикулярен краям обложки, лежащим на столе, тем самым самому столу. Устанавливая вертикально мачту, достаточно сделать так, чтобы она была перпендикулярна двум прямым, проведенным через ее основание на палубе или на земле. А это можно сделать, натянув из одной точки мачты две пары растяжек равной длины и закрепив их на одинаковых расстояниях от основания мачты на каждой из двух прямых (рис. 68)[1]. Доказательство признака перпендикулярности прямой и плоскости имеет в своей основе это реальное построение.

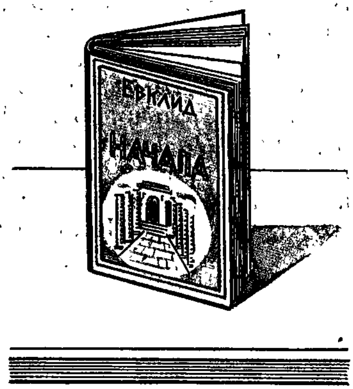


Рис. 67

Доказательство. Пусть прямая a пересекает плоскость α в точке O и перпендикулярна двум прямым b и c, проходящим в плоскости α через точку O. Нужно доказать, что прямая a перпендикулярна всякой прямой, проходящей через точку O в плоскости α. Возьмем любую такую прямую d, отличную от b и c (рис. 69).

Выберем на прямых b и c по точке B и C так, чтобы отрезок BC пересекал прямую d в какой-то точке D. Возьмем точки $B_1 \in b$ и $C_1 \in c$ так, чтобы точка O была серединой отрезков BB_1 и CC_1, т. е. чтобы B_1 и C_1 были симметричны точкам B и C относительно точки O в плоскости α. Тогда отре-

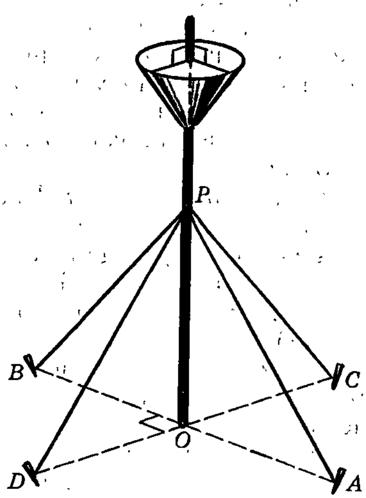


Рис. 68

---

[1] Туристы помнят, как устанавливают шатровую палатку.

зок B_1C_1, симметричный относительно O отрезку BC, пересечет прямую d в точке D_1, симметричной точке D относительно O (докажите!).

В силу симметричности точек B_1, C_1, D_1 точкам B, C, D имеем равенства

$$OD_1 = OD,\ B_1C_1 = BC,\ B_1D_1 = BD. \qquad (7.1)$$

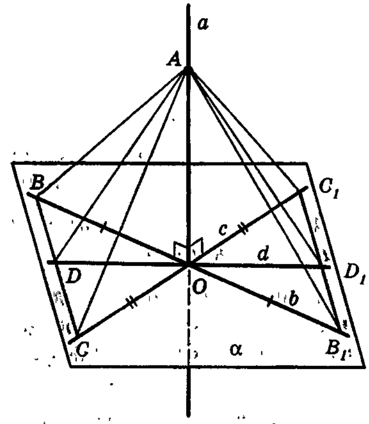


Рис. 69

Возьмем теперь на прямой a любую точку $A \neq O$ и соединим ее отрезками AB, AC, AD, AB_1, AC_1 и AD_1 с точками B, C, D, B_1, C_1, D_1. Так как $a \perp b$ и $OB = OB_1$, то a является серединным перпендикуляром к отрезку BB_1. Поэтому $AB = AB_1$. Аналогично $AC = AC_1$ Так как, кроме того, $BC = B_1C_1$, то $\angle ABC = \angle AB_1C_1$, т. е. $\angle ABD = \angle AB_1D_1$. Кроме этих равных углов, в треугольниках ABD и AB_1D_1 имеем $AB = AB_1$ и $BD = B_1D_1$. Но тогда и $AD = AD_1$.

Следовательно, точка A равноудалена от концов отрезка DD_1. Так как точка O — середина отрезка DD_1, то прямая $a = (AO)$ является серединным перпендикуляром к отрезку DD_1 в плоскости ADD_1, т. е. $a \perp d$. Итак, $a \perp \alpha$. ■

7.4. Построение взаимно перпендикулярных прямой и плоскости

Признак перпендикулярности прямой и плоскости позволяет построить взаимно перпендикулярные прямую и плоскость, т. е. доказать существование таких прямых и плоскостей. Начнем с построения плоскости, перпендикулярной данной прямой и проходящей через данную точку. Решим две задачи на построение, соответствующие двум возможностям в расположении данной точки и данной прямой.

Задача 1

Через данную точку A на данной прямой a провести плоскость, перпендикулярную этой прямой.

Решение. Проведем через прямую a любые две плоскости и в каждой из этих плоскостей через точку A проведем по прямой, перпендикулярной прямой a, обозначим их b и c (рис. 70). Плоскость α, проходящая через прямые b и c, содержит точку A и перпендикулярна прямой a (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости). Поэтому плоскость α искомая. Задача решена.

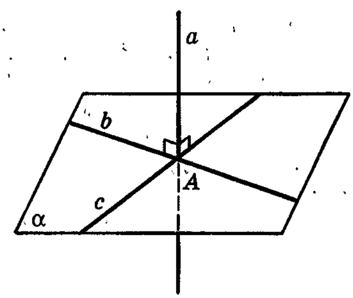


Рис. 70

Задача имеет лишь одно (единственное) решение. Действительно, допустим противное. Тогда, кроме плоскости α, через точку A проходит еще какая-нибудь плоскость β, перпендикулярная прямой a (рис. 71). Возьмем в плоскости β любую прямую p, проходящую через точку A и не лежащую в плоскости α. Проведем плоскость γ через пересекающиеся прямые a и p. Плоскость γ пересечет плоскость α по прямой q. Прямая q не совпадает с прямой p, так как q лежит в α, а p не лежит в α. Обе эти прямые лежат в плоскости γ, проходят через точку A и перпендикулярны прямой a ($p \perp a$, так как $p \subset \beta$ и $a \perp \beta$; аналогично $q \perp a$, так как $q \subset \alpha$ и $a \perp \alpha$). Но это противоречит известной теореме планиметрии, согласно которой в плоскости через каждую точку проходит лишь одна прямая, перпендикулярная данной прямой.

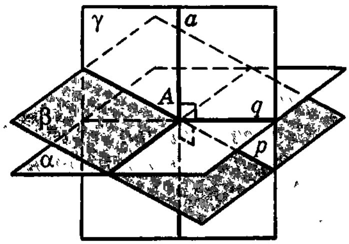


Рис. 71

Итак, предположив, что через точку A проходят две плоскости, перпендикулярные прямой a, мы пришли к противоречию. Поэтому задача имеет единственное решение. ■

Задача 2

Через данную точку A, не лежащую на данной прямой a, провести плоскость, перпендикулярную этой прямой.

Решение. Через точку A проводим прямую b, перпендикулярную прямой a. Пусть B — точка пересечения a и b. Через точку B проводим еще прямую c, перпендикулярную a (рис. 72). Плоскость, проходящая через обе проведенные прямые, будет перпендикулярна a по теореме 7.1.

Как и в задаче 1, построенная плоскость единственная. Действительно, возьмем любую плоскость, проходящую через A перпендикулярно прямой a. Такая плоскость содержит прямую, перпендикулярную прямой a и проходящую через точку A. Но такая прямая только одна. Это прямая b, которая проходит через точку B. Значит, плоскость, проходящая через A и перпендикулярная прямой a, должна содержать точку B, а через точку B проходит лишь одна плоскость, перпендикулярная прямой a (задача 1).

Итак, решив эти задачи на построение и доказав единственность их решений, мы доказали следующую важную теорему:

Теорема 7.2 *(о плоскости, перпендикулярной данной прямой).*

Через каждую точку проходит плоскость, перпендикулярная данной прямой, и притом только одна.

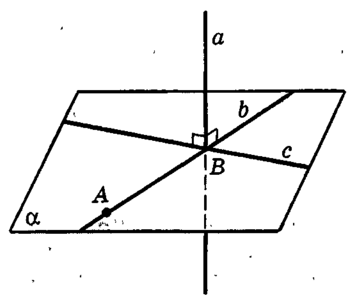


Рис. 72

Применим эту теорему для получения двух результатов.

Задача 3

Через данную точку A на данной плоскости α провести прямую, перпендикулярную этой плоскости.

Решение. Проведем через точку A в плоскости α какую-нибудь прямую a (рис. 73). Через точку A проведем плоскость β, перпендикулярную прямой a. Плоскость β пересечет плоскость α по некоторой прямой b. Проведем в плоскости β через точку A прямую c, перпендикулярную прямой b. Так как $c \perp b$ и $c \perp a$ (докажите!), то по признаку перпендикулярности прямой и плоскости $c \perp \alpha$. Задача решена. Единственность решения этой задачи доказана в п. 7.1. ■

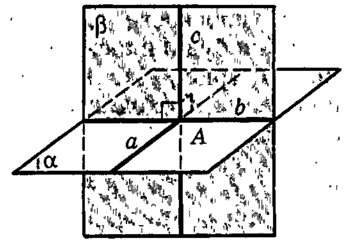


Рис. 73

Вторым результатом является теорема, о которой уже говорилось в п. 5.2.

Теорема 7.3 *(о плоскости перпендикуляров).*

Прямые, перпендикулярные данной прямой в данной ее точке, лежат в одной плоскости и покрывают ее.

Доказательство. Пусть a — данная прямая и A — какая-либо ее точка. Через нее проходит плоскость $\alpha \perp a$. По определению перпендикулярности прямой и плоскости она покрыта прямыми, перпендикулярными прямой a в точке A, т. е. через каждую точку плоскости α в ней проходит прямая, перпендикулярная прямой a.

Допустим, что через точку A проходит еще и прямая b, перпендикулярная прямой a и не лежащая в плоскости α. Проведем через нее и прямую a плоскость β. Плоскость β пересечет α по некоторой прямой c (рис. 74). И так как $\alpha \perp a$, то $c \perp a$. Получается, что через точку A в плоскости β проходят две прямые b и c, перпендикулярные прямой a. Это невозможно. Значит, прямых, перпендикулярных прямой a в точке A и не лежащих в плоскости α, нет. Все они лежат в этой плоскости. ■

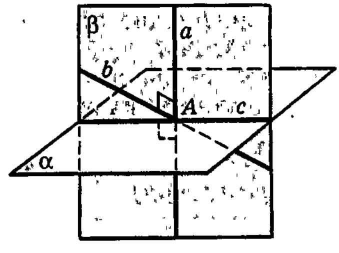


Рис. 74

Иллюстрацию к теореме о плоскости перпендикуляров дают спицы в колесе, перпендикулярные его оси: при вращении они зачерчивают плоскость (точнее, круг), принимая все положения, перпендикулярные оси вращения.

7.5. Связь между параллельностью прямых и перпендикулярностью прямой и плоскости

Мы постоянно видим, что перпендикуляры к одной и той же плоскости параллельны, а прямые, параллельные перпендикуляру к данной плоскости, сами ей перпендикулярны. Например, вертикальные линии параллельны друг другу и перпендикулярны горизонтальной плоскости. Эти линии могут представляться параллельно стоящими столбами или мачтами, стволами стройных сосен в «корабельном» лесу, колоннами зданий и т. д. (рис. 75). Эта изящная геометрия выражается в двух теоремах, которые мы сейчас докажем.

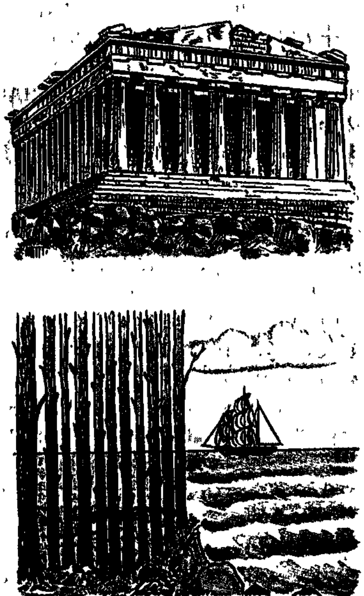


Рис. 75

Теорема 7.4 *(о параллельности перпендикуляров).*

Две прямые, перпендикулярные одной и той же плоскости, параллельны.

Теорема 7.5 *(о параллели к перпендикуляру).*

Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна плоскости, то и другая прямая перпендикулярна этой плоскости.

Если доказать одну из этих теорем, то другая уже легко получается как следствие доказанной теоремы. Но доказательство любой из них непросто. Мы предложим вам два варианта доказательства этих теорем. Сравните их и выберите тот, который вам нравится больше. Сначала мы начнем с теоремы 7.5 (о параллели к перпендикуляру), снова опираясь на минимальность перпендикуляра.

Доказательство теоремы 7.5. Пусть даны две параллельные прямые a и b, которые пересекают плоскость α соответственно в точках A и B (нарисуем их вертикальными, рис. 76). Дано также, что $a \perp \alpha$. Докажем, что тогда и $b \perp \alpha$. Допустим, что это не так. Тогда в плоскости α через точку B проходит прямая c, образующая с прямой b острый угол φ. Проведем отрезок AB. Он перпендикулярен прямой a (так как $a \perp \alpha$), а поскольку $a \parallel b$, то $AB \perp b$. Пусть длина отрезка AB равна p.

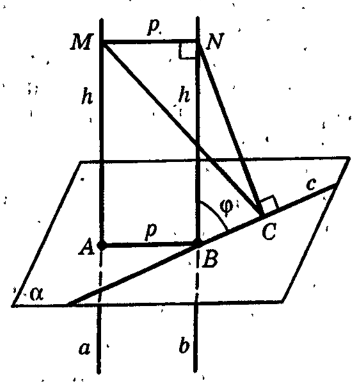


Рис. 76

Возьмем на прямой a точку M, удаленную от точки A на расстояние h и лежащую выше α.

Если спуститься из точки M на плоскость α по прямой a, то пройдем расстояние h. Но можно спуститься и так: сначала провести перпендикуляр MN на прямую b, а затем перпендикуляр NC на прямую c. Четырехугольник $AMNB$ — прямоугольник (так как $MA \parallel NB$ и $\angle MNB$ прямой). Поэтому $NB = h$ и $MN = p$. Длина ломаной MNC равна $p + h\sin\varphi$ и больше длины наклонной MC (по неравенству треугольника). В свою очередь, наклонная MC длиннее перпендикуляра MA, и потому $p + h\sin\varphi > h$ при любых h (так как точку M можно взять любой на прямой a). Но такое неравенство возможно лишь при $h < \dfrac{p}{1 - \sin\varphi}$ (напомним, что $\sin\varphi < 1$). Получили противоречие: с одной стороны, h ограничено, а с другой h — может принимать любое значение. Это противоречие возникло благодаря предположению, что прямая b не перпендикулярна плоскости α. Итак, этого быть не может, т. е. $b \perp \alpha$. ■

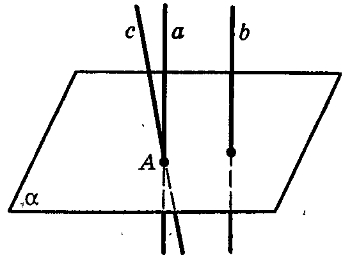


Рис. 77

Теперь уже легко доказать теорему 7.4. Пусть прямые a и b перпендикулярны плоскости α. Докажем, что $a \parallel b$. Допустим, что это не так, т. е. что $a \nparallel b$. Тогда проведем через точку A, в которой прямая a пересекает плоскость α, прямую $c \parallel b$ (рис. 77). По теореме 7.5 $c \perp \alpha$. Но тогда через точку A проходят две прямые a и c, перпендикулярные плоскости α, что невозможно. Итак, $a \parallel b$.

А теперь докажем теорему 7.4, не опираясь на теорему 7.5. Пусть снова прямые a и b перпендикулярны плоскости α и пересекают ее в точках A и B соответственно. Проведем через прямую a и точку B плоскость β и покажем, что прямая b также лежит в плоскости β (рис. 78).

В плоскости α возьмем отрезок MN, перпендикулярный отрезку AB и имеющий точку A своей серединой. Так как $AM = AN$ и $AB \perp MN$, то $BM = BN$.

Возьмем на прямой b любую точку $C \neq B$ и проведем отрезки CA, CM, CN. Поскольку $b \perp \alpha$, то треугольники CBM и CBN прямоугольные. Они равны, так как имеют общий катет CB и равные катеты BM и BN. Поэтому $CM = CN$, т. е. треугольник CMN равнобедренный. Его медиана CA является также его высотой, т. е. $CA \perp MN$.

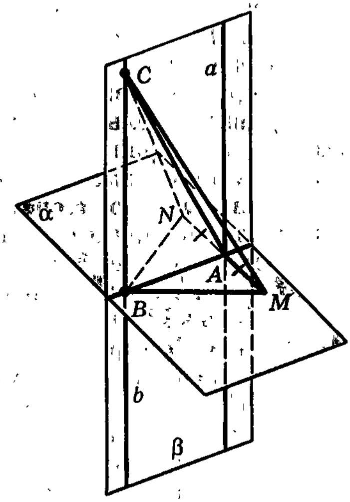


Рис. 78

Итак, три прямые, проходящие через точку A, — AB, AC и a — перпендикулярны прямой MN.

По теореме 7.3 о плоскости перпендикуляров они лежат в одной плоскости — плоскости β, которая проходит через прямые AB и a. Следовательно, точка $C \in \beta$, т. е. прямая b лежит в плоскости β (как и прямая a). Но в этой плоскости a и b перпендикулярны одной и той же прямой AB (так как $a \perp \alpha$, $b \perp \alpha$ и прямая AB лежит в плоскости α). Поэтому $b \parallel a$. ■

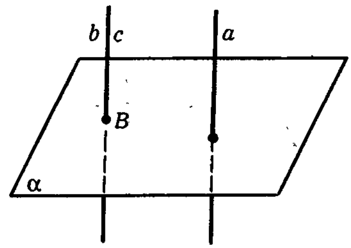


Рис. 79

Наконец, опираясь на теорему 7.4, докажем теорему 7.5.

Пусть две прямые a и b параллельны и $a \perp \alpha$ (рис. 79). Докажем, что $b \perp \alpha$.

Прямая b пересекает плоскость α в некоторой точке B (по лемме 3.1). Проведем через точку B прямую $c \perp \alpha$ (задача 3, п. 7.4). По теореме 7.4 о параллельности перпендикуляров $c \parallel a$. Но через точку B проходит лишь одна прямая b, параллельная прямой a. Поэтому $c = b$, и так как $c \perp \alpha$, то $b \perp \alpha$. ■

Итак, мы провели доказательства теорем 7.4 и 7.5 двумя путями. Первый из них ближе методам современной геометрии, второй же вполне в духе Евклида — рассматривается ряд треугольников. Как пример применения этих теорем дадим новое доказательство теоремы о том, что две прямые, параллельные третьей прямой, параллельны. Пусть $a \parallel c$ и $b \parallel c$ (рис. 80). Проведем любую плоскость α, перпендикулярную прямой c. По теореме 7.5 $a \perp \alpha$ и $b \perp \alpha$. А тогда по теореме 7.4. $a \parallel b$. ■

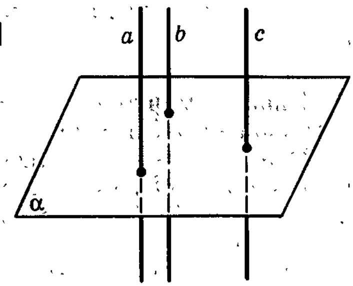


Рис. 80

7.6. Прямая, перпендикулярная данной плоскости. Симметрия относительно плоскости

Мы уже умеем проводить через данную точку A прямую, перпендикулярную данной плоскости α, в том случае, когда $A \in \alpha$. Теперь мы можем решить эту задачу и для случая, когда $A \notin \alpha$.

В этом случае надо сначала через любую точку $B \in \alpha$ провести прямую $b \perp \alpha$ (рис. 81). Если $A \in b$, то задача решена. Если же $A \notin b$, то через точку A проведем прямую $a \parallel b$. По теореме 7.5 (о параллели к перпендикуляру) прямая a перпендикулярна плоскости α. Задача решена.

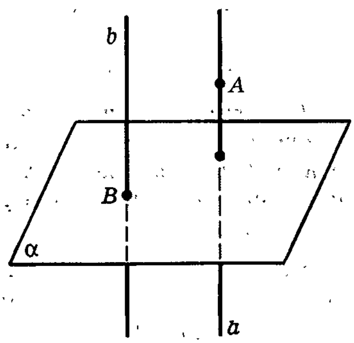


Рис. 81

Тем самым мы доказали следующую теорему:

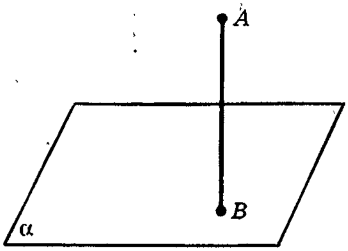


Рис. 82

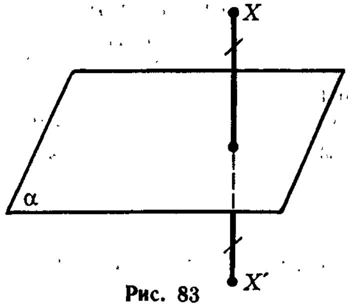


Рис. 83

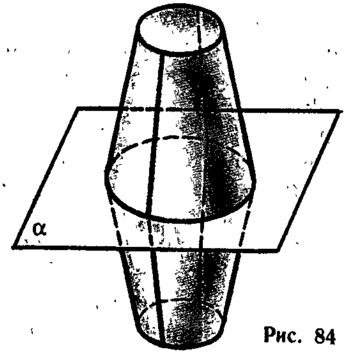


Рис. 84

Теорема 7.6 *(о прямой, перпендикулярной плоскости)*.

Через каждую точку проходит прямая, перпендикулярная данной плоскости, и притом только одна.

Напомним, что единственность этой прямой была установлена нами еще в п. 7.1.

Итак, мы теперь из любой точки A, не лежащей в данной плоскости α, можем опустить единственный перпендикуляр AB на эту плоскость (рис. 82). Это позволяет нам говорить о симметрии относительно плоскости, или, что то же самое, о зеркальной симметрии. Зеркальная симметрия в пространстве аналогична осевой симметрии на плоскости, но в определениях прямую надо заменить плоскостью.

Определения.

Точки X и X' называются симметричными относительно плоскости α, если отрезок XX' перпендикулярен плоскости α и делится ею пополам (рис. 83). Каждая точка плоскости α считается симметричной сама себе (относительно плоскости α).

Две фигуры называются симметричными относительно плоскости (или зеркально симметричными относительно плоскости α), если они состоят из попарно симметричных точек.

Это значит, что для каждой точки одной фигуры симметричная ей точка (относительно α) лежит в другой фигуре и, наоборот, точки, симметричные точкам второй фигуры, лежат в первой фигуре.

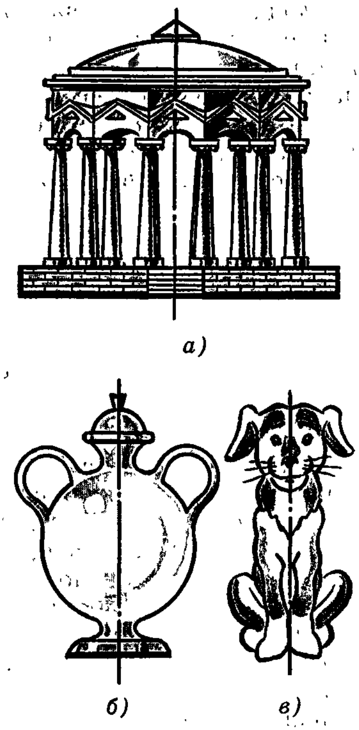


Рис. 85

В частности, фигура может быть симметрична сама себе относительно некоторой плоскости α. Это значит, что для каждой ее точки X точка X', симметричная X относительно α, лежит в ней же. Плоскость α называется тогда **плоскостью симметрии фигуры**, а фигура называется **зеркально-симметричной** (рис. 84).

Итак, в стереометрии к центральной и осевой симметриям, которые определяются дословно так же, как в планиметрии, добавляется еще один вид симметрии — зеркальная. Тела, обладающие зеркальной симметрией, встречаются повсюду (рис. 85). Укажите, как идут плоскости симметрии куба и правильных пирамид.

7.7. Три взаимно перпендикулярные прямые

На плоскости можно провести две взимно перпендикулярные прямые, но нельзя провести третью прямую, им перпендикулярную. В пространстве же через каждую точку можно провести три взаимно перпендикулярные прямые, т. е. прямые, попарно перпендикулярные друг другу.

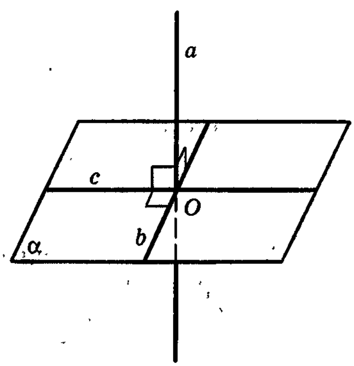


Рис. 86

Действительно, возьмем произвольную точку O. Проведем через нее какую-либо плоскость α (рис. 86). Затем построим прямую $a \perp \alpha$, проходящую через точку O. В плоскости α возьмем любые две взаимно перпендикулярные прямые b и c, проходящие через точку O. Эти три прямые a, b, c перпендикулярны друг другу: $a \perp b$ и $a \perp c$, так как $a \perp \alpha$, а $b \perp c$ по построению.

Построить еще одну перпендикулярную им всем прямую невозможно, так как прямая, перпендикулярная b и c, перпендикулярна плоскости α. А такая прямая, проходящая через точку O, согласно теореме 7.4 только одна — это прямая a.

Итак, можно сказать, что ***пространство имеет три измерения, поскольку в нем через каждую точку можно провести три, и не больше, взаимно-перпендикулярные прямые.*** (Но таких троек прямых, как ясно из построения, бесконечно много.)

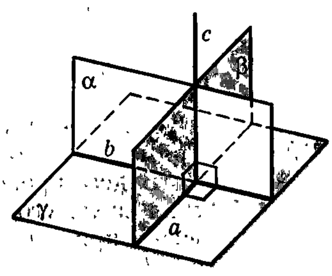


Рис. 87

Через каждые две из трех взаимно перпендикулярных прямых a, b, c проходит плоскость: α через b и c, β через a и c, γ через a и b. Каждая из этих плоскостей перпендикулярна «третьей» прямой: $\alpha \perp a$, $\beta \perp b$, $\gamma \perp c$ (рис. 87).

Задачи

Разбираемся в решении

7.1.(1). Точка A лежит в плоскости α. На этой плоскости взяли прямую a, не проходящую через A, и провели к ней перпендикуляр AB. Через точку B перпендикулярно прямой a провели другую прямую — c. Из точки A в плоскости ABC провели (AD) перпендикулярно (AB). Докажите, что $(AD)\perp\alpha$.

Решение.

Любопытно, что перпендикулярность (AD) и α можно доказать, используя только признак перпендикулярности прямой и плоскости, да еще понадобится теорема Пифагора.

Уже известно (по условию), что $(AD)\perp(AB)$. Но $(AB)\subset\alpha$. Осталось найти еще одну прямую плоскости α, перпендикулярную (AD). Такой прямой является прямая, проходящая через точку A и пересекающая прямую a в любой точке $X\in\alpha$, $X\neq B$ (рис. 88). Итак, докажем, что $(AD)\perp(AX)$. Для этого достаточно убедиться в том, что

$$|XD|^2=|XA|^2+|AD|^2 \qquad (?)$$

(см. задачу 1.27).

Из соответствующих прямоугольных треугольников следуют такие соотношения:

$$|XD|^2=|XB|^2+|BD|^2,$$
$$|XA|^2=|AB|^2+|BX|^2,$$
$$|AD|^2=|BD|^2-|AB|^2. \qquad (?)$$

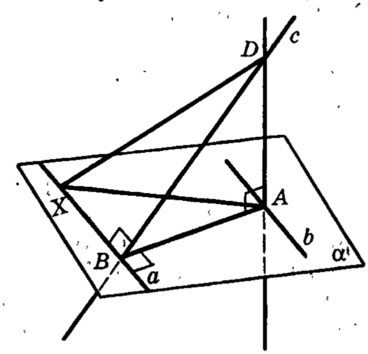


Рис. 88

Из этих равенств можно получить и требуемое соотношение (?). Доказательство закончено, но над ним стоит поразмыслить. Мы ведь хотели найти в плоскости α еще одну, кроме (AB), прямую, проходящую через A и перпендикулярную (AD). А фактически нашли их бесконечное множество: ведь точка X любая на прямой a, кроме B. А так как $(AD)\perp(AB)$ по условию, то получается, что (AD) перпендикулярна почти всем прямым плоскости α, проходящим через A, кроме одной — той, которая параллельна a. Если удастся доказать эту последнюю перпендикулярность, то получится, что мы доказали перпендикулярность (AD) и α без ссылки на признак.

Для доказательства того, что (AD) перпендикулярна этой последней прямой — назовем ее b,— есть разные идеи. Вот одна из них.

Будем проводить прямые (AX) так, чтобы угол между (AX) и b стал сколь угодно малым. В этом смысле прямая (AX) будет все «ближе» к прямой b. Но если сколь угодно «близкая» к b прямая образует с (AD) прямой угол, то и сама b также будет образовывать с (AD) прямой угол.

Реализуем эту идею. Для доказательства перпендикулярности (DA) и b достаточно взять любую точку Y прямой b, не совпадающую с A, и доказать, что $|DA|<|DY|$ (?).

Возьмем такую точку Y. Затем в плоскости α (но не на прямой b) возьмем точку Z, такую, что $|AZ|=|AY|$. В силу того что угол ZAY может быть сколь угодно мал, расстояние между точками Z и Y может быть сколь угодно мало (?).

Так как $(DA)\perp(AZ)$ (?), то $|DA|<|DZ|$. В треугольнике DYZ $|DZ|<|DY|+|YZ|$. Значит, $|DA|<|DY|+|YZ|$. И так как YZ сколь угодно мало, то $|DA|<|DY|$ (?), что и требовалось.

Дополняем теорию

7.2.(1). Из точки A, не лежащей в плоскости α, провели перпендикуляр AB к прямой a, лежащей в плоскости α. Через точку B в плоскости α провели прямую BC, перпендикулярную прямой a. Из точки A провели перпендикуляр AD на прямую BC. Докажите, что $(AD)\perp\alpha$.

7.3.(4). Докажите, что множеством точек пространства, равноудаленных от двух данных точек A и B, является плоскость, перпендикулярная прямой AB и проходящая через середину отрезка AB.

7.4.(4). Какой фигурой является множество точек, равноудаленных от вершин: а) треугольника; б) правильного многоугольника; в) правильного тетраэдра; г) правильной пирамиды; д) прямоугольного параллелепипеда; е) правильной призмы?

7.5.(5). Через каждую точку некоторой прямой проводятся прямые, перпендикулярные данной плоскости. Докажите, что все они лежат в одной плоскости.

7.6.(6). Докажите, что в правильной n-угольной пирамиде вершина проектируется в центр основания. Что из этого следует?

7.7.(6). Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Докажите, что диагональ A_1C и плоскость ABD_1 взаимно перпендикулярны.

Рисуем

7.8.(4). Пусть $PABC$ — правильный тетраэдр, точка Q — центр его основания, точка K — середина ребра PC. Нарисуйте его сечение плоскостью, проходящей: а) через Q перпендикулярно (AC); б) через Q перпендикулярно (PB); в) через K перпендикулярно (PC); г) через K перпендикулярно (AB); д) через K перпендикулярно (PB); е) через K перпендикулярно (PQ); ж) через P перпендикулярно (BK).

7.9.(4). Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Нарисуйте его сечение плоскостью, проходящей через вершину A и перпендикулярной: а) (BD); б) (B_1D_1); в) (CD_1); г) (AD_1); д) (AC); е) (C_1D); ж) (B_1D).

Представляем

7.10.(4). Равные треугольники имеют общую сторону. Какую фигуру заполняют высоты всех этих треугольников, опущенные на эту сторону?

Планируем

7.11.(1). Пусть отрезок PA — перпендикуляр к плоскости α, $A \in \alpha$. В плоскости α лежит отрезок BC, причем $|AB|=|AC|$. Пусть известны $|PA|$, $|BC|$ и угол, под которым отрезок BC виден из точки A, т. е. $\angle BAC$. Как вычислить угол, под которым он виден из точки P, т. е. $\angle BPC$? Для этой же ситуации составьте задачи, обратные данной. Рассмотрите также разные обобщения в этой задаче, а затем составьте задачи, обратные им.

7.12.(1). Пусть отрезок PO — перпендикуляр к плоскости α, $O \in \alpha$. Пусть PA, PB, PC — разные наклонные к этой плоскости, образующие между собой равные углы. Как вычислить угол между этими наклонными, если известны длина перпендикуляра к плоскости и длины наклонных? Для этой же ситуации составьте задачи, обратные данной. Рассмотрите разные обобщения в этой задаче, а затем составьте задачи, обратные им.

7.13.(3). Как проверить перпендикулярность прямой и плоскости, измеряя только расстояния?

7.14.(5). К плоскости α провели два перпендикуляра AB и CD. $B \in \alpha$, $D \in \alpha$. Пусть $|AB|$, $|CD|$, $|BD|$ известны. Как вычислить $|AC|$? Составьте задачи, обратные данной.

7.15.(6). а) Пусть в треугольной пирамиде все боковые ребра равны. Как вычислить высоту пирамиды, если известна длина бокового ребра и каждого ребра основания? б) Пусть в правильной n-угольной пирамиде известны боковое ребро и ребро основания. Как вычислить высоту пирамиды?

7.16.(6). Пусть $PABC$ — правильный тетраэдр, точка Q — центр его основания, точка K — середина ребра PA. Нарисуйте перпендикуляры: а) из K на (ABC); б) из K на (BCP); в) из Q на (APC); г) из Q на (BKC). Как найти длину каждого из них, если ребро тетраэдра известно?

7.17.(6). В четырехугольной пирамиде $PABCD$ с равными ребрами точка Q — центр основания, точка K — середина ребра AB. Нарисуйте перпендикуляры: а) из A на (BPD); б) из K на (APC); в) из K на (CPD); г) из Q на (APB); д) из D на (BCP); е) из K на (APD); ж) из C на (APD).

Как найти длину каждого из них, если ребро пирамиды известно?

7.18.(6). Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Точка K — середина BB_1, точка L — середина CC_1, точка M — середина A_1B_1, точка $N \in (BC)$ и точка C — середина отрезка BN. Нарисуйте перпендикуляры: а) из A на (BB_1D_1); б) из A_1 на (AB_1D_1); в) из D_1 на (AB_1C); г) из K на (CDD_1); д) из L на (BDB_1); е) из M на (AB_1D_1); ж) из N на (BDB_1); з) из N на (DA_1B_1); и) из D_1 на (A_1C_1B).

Как вычислить длину каждого из них, если ребро куба известно?

Находим величину

7.19.(6). Нарисуйте высоту тетраэдра $PABC$, если: а) все ребра, кроме PB, имеют длину 2, а длина ребра PB равна 1. Как изменится рисунок, если длина PB будет равна $\sqrt{6}$; 3; 10? б) $|PA|=|PB|=|PC|=2$,

$|AC|=3$, $|AB|=2$, $|BC|=2$. Как изменится рисунок, если $|BC|=3$; 4? в) $|PA|=|PC|=2$, $|BA|=|BC|=1$, $|PB|=|AC|$.

В каждом из случаев вычислите высоту пирамиды. Всегда ли достаточно для этого данных?

7.20.(6). Нарисуйте высоту четырехугольной пирамиды $PABCD$, если: а) все ее боковые ребра равны 2, в основании ее лежит равнобедренная трапеция, у которой боковая сторона, равная 1, образует с основанием, равным 2, угол 60°; б) ее основанием является квадрат со стороной 2, $|PC|=|PD|=2$, $|PA|=|PB|=3$.

В каждом из случаев вычислите высоту пирамиды.

7.21.(6). Диагональ B_1D куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — перпендикуляр к плоскости α, $D\in\alpha$. Нарисуйте перпендикуляры к плоскости α из точек B, D_1, A_1, A. Вычислите длину каждого из них, если ребро куба известно.

Ищем границы

7.22.(5). В плоскости α лежит треугольник ABC. Из точек B и C с одинаковой скоростью стали одновременно двигаться точки X и Y по прямым, перпендикулярным плоскости α. В какой момент времени отрезок XY виден из точки A под наибольшим углом? под наименьшим углом? Решите задачу в двух случаях: а) точки движутся в одном направлении; б) точки движутся в разных направлениях.

Доказываем

7.23.(1). Пусть AB — перпендикуляр на плоскость α, $B\in\alpha$, AC и AD — наклонные к этой плоскости. Докажите, что: а) $|AC|=|AD|$ тогда и только тогда, когда $|BC|=|BD|$; б) $|AC|>|AD|$ тогда и только тогда, когда $|BC|>|BD|$.

7.24.(1). В правильном треугольнике ABC точка O — его центр. Пусть OP — прямая, перпендикулярная плоскости ABC, и пусть точка X лежит на этой прямой, не совпадая с точкой O. Докажите, что: а) расстояния от X до вершин треугольника равны; б) расстояния от X до сторон треугольника равны; в) $\angle AXO=\angle BXO=\angle CXO$; г) $\angle XAO=\angle XBO=\angle XCO$. Обобщите задачу.

7.25.(3). Пусть $A\in\alpha$ и прямая AB перпендикулярна двум прямым AC и AD плоскости α. Проведите прямую AK в плоскости α и возьмите на ней любую точку $X\neq A$. Через точку X проведите отрезок, который заключен между прямыми AC и AD и точкой X делится пополам. Соедините точку B с концами этого отрезка и с точкой X. Исходя из этого построения докажите, что $(AB)\perp\alpha$.

7.26.(3). Пусть $A\in\alpha$ и прямая AB перпендикулярна двум прямым AC и AD плоскости α. Продолжите отрезок AB за точку A на расстояние, равное $|AB|$. Полученный отрезок обозначьте AB_1. Через точку A в плоскости α проведите любую прямую AK, отличную от AC и AD. Проведите прямую, пересекающую прямые AC, AD, AK. Соедините точки B и B_1 с точками пересечения этих прямых. Исходя из этого построения докажите, что $(AB)\perp\alpha$.

7.27.(3). Пусть прямая a перпендикулярна двум прямым плоскости α. Докажите, что она перпендикулярна биссектрисе угла, образованного этими прямыми. После этого докажите, что она перпендикулярна любой прямой плоскости α, проходящей через точку пересечения a и α, т. е. $a \perp \alpha$.

7.28.(3). Два равнобедренных треугольника ABC ($|AB|=|AC|$) и ADE ($|AD|=|AE|$) имеют общую медиану, проведенную из вершины A, и не лежат в одной плоскости. Докажите, что эта медиана перпендикулярна плоскости, в которой лежат основания BC и DE этих треугольников.

7.29.(3). Точка O — центр симметрии параллелограмма $ABCD$, а точка P не лежит в плоскости этого параллелограмма. При этом $|PA|=|PC|$, $|PB|=|PD|$. Докажите, что $(PO) \perp (ABC)$. Как это можно обобщить?

7.30.(3). Прямые a и b пересекаются в точке P. Через эту точку проведены две плоскости: одна из них перпендикулярна прямой a, а другая перпендикулярна прямой b. Докажите, что прямая пересечения этих плоскостей перпендикулярна плоскости, в которой лежат прямые a и b.

7.31.(4). Дана правильная треугольная пирамида. Докажите, что: а) через боковое ребро можно провести плоскость, перпендикулярную прямой, проходящей через ребро основания; б) через ребро основания можно провести плоскость, перпендикулярную прямой, проходящей через боковое ребро.

7.32.(4). Из точки A, не лежащей в плоскости α, проведена наклонная AB к этой плоскости. Постройте прямую в плоскости α, перпендикулярную прямой AB.

7.33.(4). На плоскости даны две пересекающиеся прямые a и b. На прямой a берется точка, не совпадающая с точкой пересечения этих прямых, и через нее проводится плоскость, перпендикулярная прямой a. На прямой b берется точка, не совпадающая с точкой пересечения этих прямых, и через нее проводится плоскость, перпендикулярная прямой b. Докажите, что эти плоскости пересекаются по прямой, перпендикулярной данной плоскости.

7.34.(4). В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ боковые грани равны. В вершине A сходятся их равные углы. Докажите, что $(BD) \perp (AA_1C_1)$.

7.35.(4). Две правильные пирамиды имеют одно и то же основание. Докажите, что их высоты лежат на одной прямой.

7.36.(5). Дан прямоугольный параллелепипед. Докажите, что в нем: а) диагонали равны; б) прямая, проходящая через центры его противоположных граней, перпендикулярна плоскостям этих граней.

7.37.(6). Докажите, что в правильной n-угольной пирамиде сумма всех углов при ее вершине меньше чем $360°$. Верно ли это утверждение для других пирамид?

Исследуем

7.38.(3). В треугольнике ABC $\angle C=90°$. Пусть $(AK) \perp (ABC)$. Докажите, что $(BC) \perp (AKC)$. Будет ли выполняться эта перпендикулярность, если $\angle C \neq 90°$? а если (AK) не будет перпендикулярна к плоскости?

7.39.(3). Два равных круга имеют единственную общую точку A, через которую проходят диаметры AB и AC этих кругов. Эти диаметры не лежат на одной прямой. В каком случае прямая пересечения плоскостей, в которых лежат данные круги, перпендикулярна (ABC)? Существенно ли для решения задачи условие равенства кругов?

7.40.(4). Даны две прямые. При каком их расположении через одну из них проходит плоскость, перпендикулярная другой? Верно ли, что если это условие выполняется, то и через другую прямую проходит плоскость, перпендикулярная первой прямой?

7.41.(5). Точка X равноудалена от двух соседних вершин квадрата $ABCD$. Докажите, что она равноудалена от двух других его вершин. Будет ли это верно, если вместо квадрата взять прямоугольник? ромб? Как можно обобщить полученные результаты? А если взять не соседние вершины, то что получится?

7.42.(6). Треугольник ABC равнобедренный с основанием BC. Через вершину A проведена прямая, перпендикулярная его плоскости, точка X — переменная точка этой прямой. Сравните углы BXC и BAC. Как изменяется угол BXC при удалении точки X от A? Изменится ли полученный вами результат, если треугольник ABC не будет равнобедренным?

7.43.(6). Через центры двух граней правильного тетраэдра проведены прямые, перпендикулярные плоскостям этих граней. Установите взаимное положение этих прямых. Возьмите еще одну такую же прямую. Как она расположится по отношению к первым двум? Обобщите задачу.

7.44.(6). Дан правильный тетраэдр. Укажите его сечение с наибольшей (наименьшей) площадью, проходящее через ребро.

7.45.(6). Через вершины равностороннего треугольника проведены три прямые, перпендикулярные его плоскости. Могут ли на таких прямых лежать вершины прямоугольного треугольника? Вообще, могут ли на таких прямых лежать вершины любого по форме треугольника (иначе говоря, треугольника, подобного любому наперед заданному)?

§ 8. Перпендикулярность плоскостей

8.1. Определение перпендикулярности плоскостей

Ясно, что соседние грани куба или прямоугольного параллелепипеда (например, стены и потолок или стены и пол комнаты) взаимно перпендикулярны. А что это значит? Вспомним сначала, как проверяют перпендикулярность плоских поверхностей на практике, а затем, выразив эти наблюдения геометрически, придем к определению перпендикулярности плоскостей.

Как обеспечить, например, перпендикулярность пола и стен? Пол должен быть горизонтален, а стены ставят вертикально. Вертикально ли установлена плоская поверхность (стена, забор), проверяют с помощью отвеса (веревки с грузом) — стена стоит вертикально, если в любом ее месте отвес, располагаясь вдоль нее, не отклоняется. Отвес же перпендикулярен полу. И получается, что вертикально стоящая стена, перпендикулярная горизонтальному полу, покрыта перпендикулярами к нему.

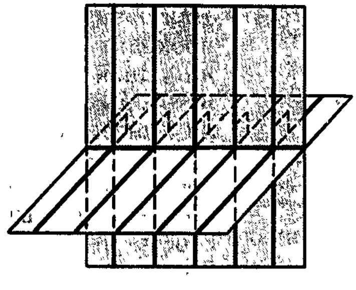


Рис. 89

Это наблюдение позволяет назвать взаимно перпендикулярными плоскостями такие плоскости, каждая из которых заполнена перпендикулярами к другой плоскости (рис. 89).

Но перпендикулярность друг другу двух соседних стен или двух граней бруса отвесом не проверишь. А в этом случае используют угольник, прикладывая его так, чтобы стороны угольника шли перпендикулярно углу комнаты или ребру бруса (рис. 90). Выразив эту ситуацию геометрически, приходим к другому определению перпендикулярности плоскостей. Сформулируем его.

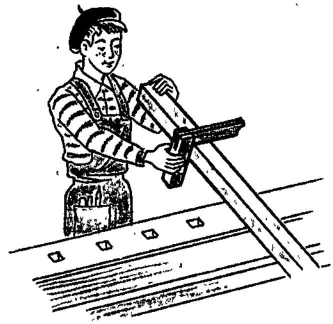


Рис. 90

Пусть две плоскости α и β пересекаются по прямой c (рис. 91, *а*). Возьмем любую их общую точку O. Проведем через O в плоскостях α и β прямые a и b, перпендикулярные прямой c. Если окажется, что $a \perp b$, то плоскости α и β называют **взаимно перпендикулярными.**

Данное определение имеет то преимущество, что позднее оно окажется частным случаем определения угла между плоскостями.

Перпендикулярность плоскостей α и β обозначается так: $\alpha \perp \beta$.

Докажем, что, определяя перпендикулярность плоскостей, можно брать любую их общую точку (т. е. проверим корректность данного определения, независимость его от выбора точки O).

Итак, пусть дано, что прямые a и b, проходящие через точку O в плоскостях α и β, взаимно перпендикулярны: $a \perp b$. Возьмем другую точку $O_1 \in c$ и проведем в плоскостях α и β через O_1 прямые $a_1 \perp c$ и $b_1 \perp c$. Докажем, что $a_1 \perp b_1$ (рис. 91, *б*). Прямые a и a_1 параллельны (как два перпендикуляра к прямой c, лежащие в плоскости α). Так как $a_1 \| a$ и $a \perp \beta$, то $a_1 \perp \beta$ (по теореме 7.5 о параллели к перпендикуляру). Поскольку b_1 лежит в плоскости β, то $a_1 \perp b_1$. ■

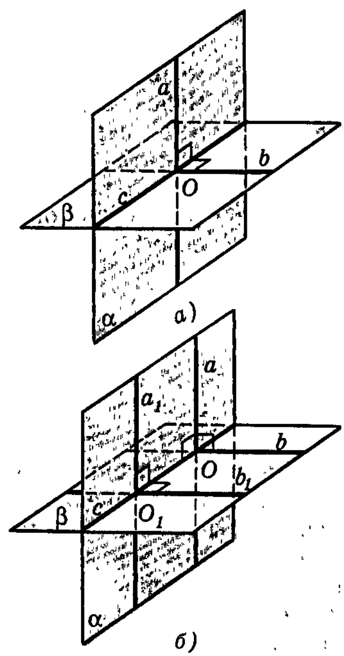


Рис. 91

8.2. Свойства взаимно перпендикулярных плоскостей

Конечно, вы уже заметили, что из трех прямых a, b, c (рис. 91, a) любые две взаимно перпендикулярны. В частности, $b \perp a$ и $b \perp c$. Поэтому $b \perp \alpha$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости). Аналогично $a \perp \beta$. Итак, каждая из двух взаимно перпендикулярных плоскостей содержит перпендикуляр к другой плоскости. Эти перпендикуляры заполняют взаимно перпендикулярные плоскости (рис. 89). О них и идет речь в следующем утверждении:

Свойство 1.

Прямая, лежащая в одной из двух взаимно перпендикулярных плоскостей и перпендикулярная их общей прямой, перпендикулярна другой плоскости.

Доказательство. Пусть плоскости α и β взаимно перпендикулярны и пересекаются по прямой c. Пусть, далее, прямая a лежит в плоскости α и $a \perp c$ (рис. 91, a). Прямая a пересекает прямую c в некоторой точке O. Проведем через O в плоскости β прямую b, перпендикулярную прямой c. Так как $\alpha \perp \beta$, то $a \perp b$. Поскольку $a \perp b$ и $a \perp c$, то $a \perp \beta$ по признаку перпендикулярности прямой и плоскости. ■

Второе свойство является утверждением, обратным первому свойству.

Свойство 2.

Прямая, имеющая общую точку с одной из двух взаимно перпендикулярных плоскостей и перпендикулярная другой плоскости, лежит в первой из них.

Доказательство. Пусть плоскости α и β взаимно перпендикулярны, прямая $a \perp \beta$ и a имеет с α общую точку A (рис. 92). Через точку A в плоскости α проведем прямую l, перпендикулярную прямой $c = \alpha \cap \beta$. Согласно свойству 1 $l \perp \beta$. Поскольку в пространстве через каждую точку проходит лишь одна прямая, перпендикулярная данной плоскости, то прямые a и l совпадают. Так как l лежит в плоскости α, то и $a \subset \alpha$. ■

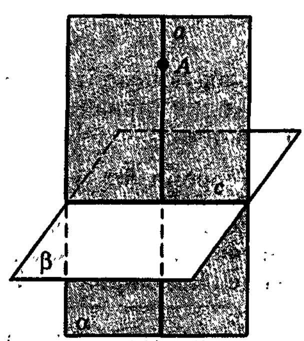


Рис. 92

8.3. Признак перпендикулярности плоскостей

Мы уже знаем, что каждая из двух взаимно перпендикулярных плоскостей содержит перпендикуляр к другой плоскости. Обратное утверждение — основной признак перпендикулярности плоскостей.

Теорема 8.1.

Если плоскость проходит через перпендикуляр к другой плоскости, то эти плоскости взаимно перпендикулярны.

Доказательство. Пусть плоскость α содержит прямую a, перпендикулярную плоскости β (рис. 91, a). Тогда прямая a пересекает плоскость β в точке O. Точка O лежит на прямой c, по которой пересекаются плоскости α и β. Проведем в плоскости β через O прямую $b \perp c$. Так как $a \perp \beta$ и b лежит в плоскости β, то $a \perp b$. Следовательно, $\alpha \perp \beta$. ■

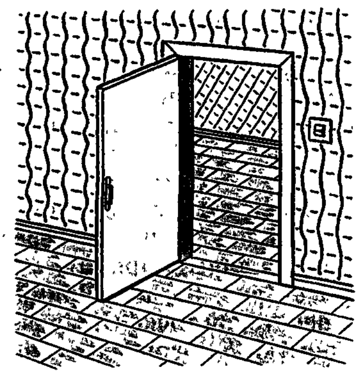


Рис. 93

Данный признак имеет простой практический смысл: плоскость двери, навешенной на перпендикулярный полу косяк, перпендикулярна плоскости пола при всех положениях двери (рис. 93). О другом практическом применении этого признака уже говорилось: когда требуется проверить, вертикально ли установлена плоская поверхность (стена, забор и т. п.), то это делается с помощью отвеса. Отвес всегда направлен вертикально, и стена стоит вертикально, если в любом ее месте отвес, располагаясь вдоль нее, не отклоняется.

8.4. Две пересекающиеся плоскости, перпендикулярные третьей плоскости

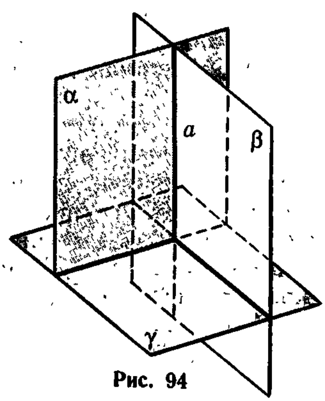


Рис. 94

Следующую теорему можно рассматривать как еще один признак перпендикулярности прямой и плоскости.

Теорема 8.2.

Если две плоскости, перпендикулярные третьей плоскости, пересекаются, то прямая их пересечения перпендикулярна третьей плоскости.

Доказательство. Пусть две плоскости α и β, пересекающиеся по прямой a, перпендикулярны плоскости γ (рис. 94). Тогда через любую точку прямой a проведем прямую, перпендикулярную плоскости γ. Согласно свойству 2 эта прямая лежит и в плоскости α, и в плоскости β, т. е. совпадает с прямой a. Итак, $a \perp \gamma$. ■

Задачи

Разбираемся в решении

8.1.(3). Через середины сторон треугольника проведены плоскости, перпендикулярные этим сторонам. Докажите, что общая прямая плоскостей перпендикулярна плоскости треугольника. Обобщите утверждение.

Решение.

Пусть ABC — данный треугольник, точка K — середина стороны AC, точка L — середина стороны BC, точка M — середина стороны AB. Плоскость, перпендикулярную (AC) и проходящую через K, обозначим α, плоскость, перпендикулярную (BC) и проходящую через L,— β, а плоскость, перпендикулярную (AB) и проходящую через M,— γ (рис. 95).

Прежде всего докажем, что все эти плоскости имеют общую прямую. Возьмем сначала плоскости α и β. Каждая из них пересекает (ABC). Прямые пересечения этих плоскостей с (ABC) являются серединными перпендикулярами к отрезкам AC и BC (?), а потому имеют общую точку. Так как α и β имеют общую точку, то они имеют общую прямую — назовем ее a. (Разумеется, α и β не совпадают (?).)

Докажем, что прямая a лежит в плоскости γ. Так как $a \subset \alpha$, то все точки прямой a равноудалены от точек A и C. Так как $a \subset \beta$, то все точки прямой a равноудалены от точек C и B. Отсюда следует, что все точки прямой a равноудалены от точек A и B, а потому прямая a лежит в плоскости, перпендикулярной (AB) и проходящей через точку M — середину отрезка AB, т. е. в γ.

Теперь докажем, что $a \perp (ABC)$. Так как $(AC) \perp \alpha$ и $(AC) \subset (ABC)$, то $(ABC) \perp \alpha$. Так как $(BC) \perp \beta$ и $(BC) \subset (ABC)$, то $(ABC) \perp \beta$. Но тогда (ABC) перпендикулярна прямой пересечения плоскостей α и β, т. е. прямой a.

Теперь займемся обобщениями. В этой задаче естественно вместо треугольника взять многоугольник. Самостоятельно сформулируйте и докажите это общее утверждение. Обобщая, можно пойти и в другом направлении, отбросив условие, что плоскости проходят именно через середины сторон треугольника. Как будет выглядеть это обобщение и как оно доказывается? И наконец, можно объединить и первое, и второе обобщение. Сделайте это.

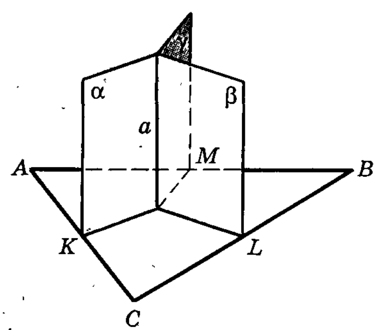


Рис. 95

Дополняем теорию

8.2.(3). Две плоскости взаимно перпендикулярны. Из одной точки проведены перпендикуляры к этим плоскостям. Докажите, что и они взаимно перпендикулярны. Сформулируйте и проверьте обратное утверждение.

Рисуем

8.3.(3). Пусть $PABCD$ — правильная четырехугольная пирамида. Нарисуйте ее сечение плоскостью: а) проходящей через диагональ основания перпендикулярно его плоскости; б) перпендикулярной двум противоположным граням; в) перпендикулярной двум соседним боковым граням.

Представляем

8.4.(2). Точки A и B лежат в двух перпендикулярных плоскостях вне их общей прямой. Сколько существует точек X на их общей прямой, таких, что треугольник AXB прямоугольный ($\angle X = 90°$)?

8.5.(4). Три плоскости расположены так, что каждые две из них взаимно перпендикулярны. Проводится четвертая плоскость, пересекающая все три по различным прямым, причем к одной из данных плоскостей она перпендикулярна. а) Попробуйте без рисунка установить, на сколько частей разделили пространство все эти плоскости. б) Как расположены прямые, по которым проведенная плоскость пересекается с плоскостями, к которым она не перпендикулярна?

Планируем

8.6.(2). Два равносторонних треугольника ABC и ADC лежат в перпендикулярных плоскостях. $|AC| = 1$. Вычислите $|BD|$. Как вы будете решать задачу, если треугольники ABC и ADC будут: а) равнобедренными с общим основанием; б) прямоугольными с общим катетом; в) равными? Во всех случаях считайте, что стороны треугольников известны. Выберите сами для них числовые значения и получите результат.

8.7.(4). В четырехугольной пирамиде две грани перпендикулярны основанию. Нарисуйте высоту пирамиды, если основанием является: а) квадрат; б) прямоугольник; в) ромб; г) равнобедренная трапеция; д) параллелограмм; е) четырехугольник, имеющий ось симметрии. Как ее вычислить в пирамиде, у которой все ребра известны? Выберите сами числовые данные и получите результат.

Находим величину

8.8.(2). Равнобедренный прямоугольный треугольник расположен так, что его катеты лежат в двух перпендикулярных плоскостях. Его гипотенуза равна 2, расстояние от одной из вершин до прямой пересечения этих плоскостей равно 1. Чему равно расстояние от другой вершины до прямой пересечения?

Ищем границы

8.9.(3). Дан правильный тетраэдр. 1) Нарисуйте его сечение плоскостью, перпендикулярной основанию и проходящей через: а) точку внутри бокового ребра; б) точку внутри ребра основания. 2) Пусть ребро тетраэдра известно, а положение точки на ребре фиксировано. Сможете ли вы найти, в каких границах лежит площадь сечения?

Доказываем

8.10.(3). Треугольники ABC и ABD прямоугольные с прямым углом при вершине B, $(ABC)\perp(ABD)$. Докажите, что: а) $(ABC)\perp(BCD)$; б) $(ABD)\perp(BCD)$; в) (ACD) не перпендикулярна плоскостям этих треугольников.

8.11.(3). В правильной четырехугольной пирамиде две противоположные боковые грани взаимно перпендикулярны. Докажите, что и другие боковые грани также взаимно перпендикулярны.

8.12.(3). Из точки A проведен перпендикуляр AB на плоскость α. Из точки B проведен перпендикуляр BC на прямую a, лежащую в плоскости α. Из точки C проведен перпендикуляр CD к прямой a. Докажите, что $D\in(ABC)$.

8.13.(3). Постройте плоскость, которая перпендикулярна данной плоскости и проходит через данную прямую.

8.14.(4). Дан прямоугольник $ABCD$. $(PD)\perp(ABC)$. Докажите, что прямая пересечения плоскостей ABP и CDP перпендикулярна плоскости APD.

8.15.(4). Имеется n плоскостей. Через данную точку проведены прямые, перпендикулярные всем этим плоскостям. Докажите, что все эти прямые лежат в одной плоскости при таких условиях: а) все плоскости пересекаются по одной и той же прямой; б) каждые две плоскости пересекаются, причем прямые пересечения параллельны между собой.

Исследуем

8.16.(2). Две окружности лежат в перпендикулярных плоскостях и имеют общую точку и касательную. Нарисуйте такие диаметры окружностей, которые перпендикулярны между собой. Сформулируйте вывод. Составьте и проверьте обратное утверждение. Проделайте такую же работу, если окружности имеют общую хорду. Как будут обстоять дела, если окружности будут иметь единственную общую точку, но общей касательной у них не будет?

8.17.(3). Треугольники ABC и ABD равносторонние и лежат в перпендикулярных плоскостях. а) Докажите, что (CKD) перпендикулярна плоскости каждого из них, если точка K — середина стороны AB. б) Докажите, что другой такой же плоскости через прямую CD не провести. в) Будут ли перпендикулярны плоскости ACD и BCD? г) Изменятся ли результаты, если вместо равносторонних треугольников взять равнобедренные с общим основанием AB?

8.18.(3). Пусть $ABCD$ и $ABKL$ — два квадрата, плоскости которых перпендикулярны. Докажите, что: а) (ADL) перпендикулярна плоскости каждого квадрата; б) $(ADK)\perp(ABK)$; в) $(ADK)\perp(BCL)$; г) $(KDL)\perp$ $\perp(ADL)$. Будут ли перпендикулярны плоскости (DBK) и (ACL)?

8.19.(3). Можно ли через одну точку пространства провести четыре плоскости, из которых каждые две взаимно перпендикулярны?

8.20.(4). Три плоскости попарно перпендикулярны. Прямоугольник расположен так, что одна его сторона лежит в одной из данных плоскостей, а противоположная сторона — в другой. Как расположена плоскость прямоугольника по отношению к третьей из данных плоскостей?

8.21.(4). Из каких трех утверждений можно вывести четвертое: $a\perp\alpha$, $b\perp\beta$, $a\perp b$, $\alpha\perp\beta$?

Рассуждаем

8.22.(2). Докажите, что: а) если прямая пересекает каждую из двух перпендикулярных плоскостей, то она не перпендикулярна каждой из них; б) если прямая пересекает каждую из двух пересекающихся плоскостей и перпендикулярна хотя бы одной из них, то эти плоскости не перпендикулярны.

§ 9. Параллельные плоскости

9.1. Первый признак параллельности плоскостей

Для расположения двух плоскостей в пространстве возможны два случая.

1. *Две плоскости имеют хоть одну общую точку.* Тогда по аксиоме пересечения плоскостей их пересечение есть прямая. Такие плоскости называются пересекающимися.

2. *Две плоскости не имеют общих точек.* Такие плоскости называются **параллельными.**

Для параллельных плоскостей α и β применяется обозначение $\alpha\parallel\beta$. Существование параллельных плоскостей легко вытекает из следующего простого признака параллельности плоскостей.

Теорема 9.1.

Две плоскости, перпендикулярные одной прямой, параллельны.

Доказательство. Действительно, такие две плоскости не могут иметь общих точек, так как через каждую точку проходит лишь одна плоскость,

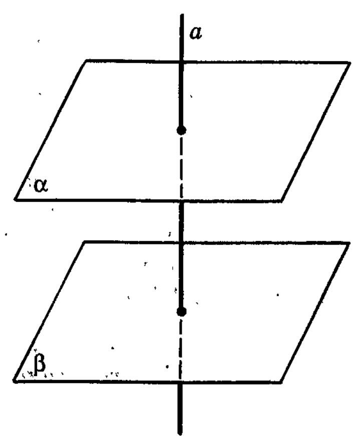


Рис. 96

перпендикулярная данной прямой (теорема 7.2). Следовательно, эти плоскости параллельны. ■

Построив теперь две плоскости, перпендикулярные одной прямой (задача 1 § 7), получим параллельные плоскости (рис. 96).

Параллельные плоскости и их общие перпендикуляры мы наблюдаем постоянно на таких примерах, как пол и потолок, перпендикулярные ребру угла комнаты, и т. п. Плоскости, перпендикулярные одной прямой, можно представлять себе насаженными на нее, как листы картона на спицу.

Покажем, решив задачу на построение, что через каждую точку, не лежащую на данной плоскости, проходит параллельная ей плоскость.

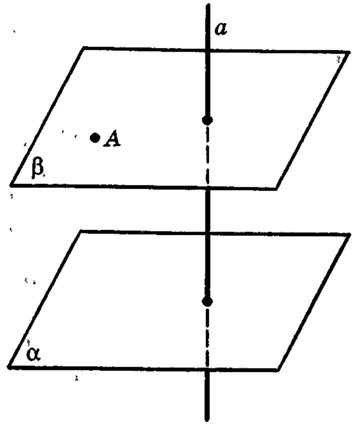


Рис. 97

Задача.

Через точку A, не лежащую на плоскости α, провести плоскость, параллельную α.

Решение. Проведем любую прямую a, перпендикулярную плоскости α (как это возможно сделать, указано в § 7). Через точку A проведем плоскость β, перпендикулярную прямой a (рис. 97). Это возможно в силу теоремы 7.2. По теореме 9.1 плоскости α и β параллельны, т. е. β — искомая плоскость. ■

Единственность решения этой задачи будет доказана позднее.

9.2. Леммы о пересечении прямой или плоскости с параллельными плоскостями

Лемма 9.1 *(о пересечении двух параллельных плоскостей третьей плоскостью).*

Прямые, по которым две параллельные плоскости пересекают третью плоскость, параллельны.

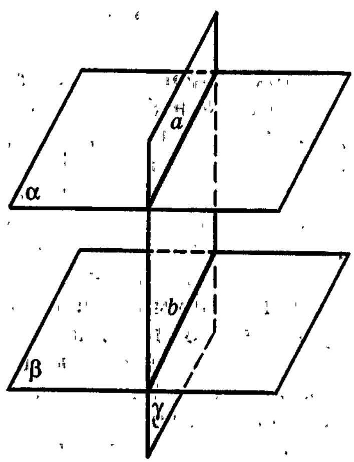


Рис. 98

Доказательство. Пусть параллельные плоскости α и β пересекают плоскость γ по прямым a и b соответственно (рис. 98). Прямые a и b лежат в одной плоскости γ. Они не имеют общих точек, так как лежат в плоскостях α и β, не имеющих общих точек. Поэтому прямые a и b параллельны. ■

Лемма 9.2 *(о пересечении прямой с двумя параллельными плоскостями).*

Если прямая пересекает одну из двух параллельных плоскостей, то она пересекает и другую из них.

Доказательство. Пусть плоскости α и β параллельны и прямая c пересекает плоскость α в точке A (рис. 99). Возьмем любую точку C в плоскости β и проведем плоскость γ через прямую c и точку C. Плоскость γ пересекает плоскости α и β, так как она имеет с ними общие точки A и C соответственно. По лемме 9.1 прямые a и b, по которым γ пересекает α и β, параллельны. Прямая c лежит с параллельными прямыми a и b в одной плоскости γ и пересекает прямую a в точке A. Из аксиомы параллельности следует, что прямая c пересекает и прямую b в некоторой точке B. Но тогда точка B — общая точка прямой c и плоскости β. Прямая c не лежит в β, так как c проходит через точку A вне плоскости β. Значит, прямая c пересекает плоскость β. ■

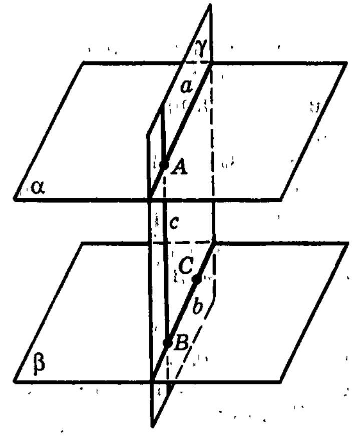


Рис. 99

9.3. Основная теорема о параллельных плоскостях

Теорема 9.2 *(основная теорема о параллельных плоскостях).*

Через каждую точку, не лежащую в данной плоскости, проходит плоскость, параллельная данной, и притом только одна.

Доказательство. Пусть даны плоскость α и не лежащая в ней точка A. Существование плоскости $\beta \| \alpha$, которая проходит через точку A, мы доказали, решив задачу в п. 9.1 (рис. 97).

Докажем единственность такой плоскости. Возьмем любую другую плоскость γ, проходящую через точку A, и покажем, что γ пересекает α (рис. 100). Для этого достаточно доказать, что в плоскости γ найдется прямая, пересекающая плоскость α. Такую прямую легко построить. Возьмем в γ любую точку B, не лежащую в плоскости β, и проведем в плоскости γ через точки A и B прямую p. Прямая p пересекает плоскость β в точке A. Поэтому в силу леммы 9.2 прямая p пересекает и плоскость α в некоторой точке C. Оказалось, что точка C —

общая точка двух плоскостей α и γ. Итак, γ пересекает α. Поскольку все плоскости, проходящие через точку A и отличные от плоскости β, пересекают плоскость α, то β — единственная плоскость, параллельная плоскости α, которая проходит через точку A. ■

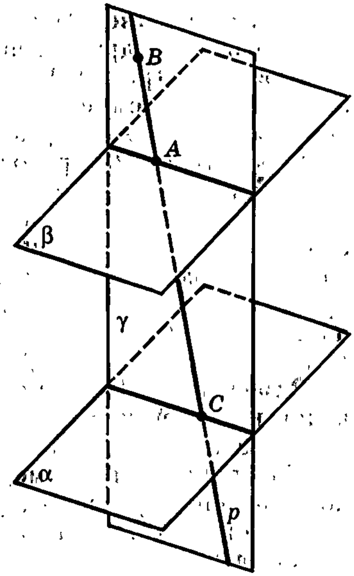


Рис. 100

Следствие 1.

Если плоскость пересекает одну из двух параллельных плоскостей, то она пересекает и другую из них.

Доказательство. В противном случае через одну точку проходили бы две плоскости, параллельные одной и той же плоскости, что невозможно по теореме 9.2. ■

Следствие 2.

Две плоскости, параллельные третьей, параллельны.

Доказательство. Если две плоскости β и γ параллельны плоскости α, то они не имеют общей точки, так как в противном случае через эту точку проходят две плоскости, параллельные α. ■

Это следствие и дает признак параллельности плоскостей.

Замечание. Обратите внимание на аналогию с параллельными прямыми на плоскости: начиная с определения, большинству доказанных здесь предложений о параллельных плоскостях соответствуют такие же предложения о параллельных прямых на плоскости. Сформулируйте их.

9.4. Прямая, перпендикулярная двум параллельным плоскостям

Завершим этот параграф теоремой, которую можно рассматривать как еще один признак перпендикулярности прямой и плоскости.

Теорема 9.3.

Если две плоскости параллельны, то прямая, перпендикулярная одной из них, перпендикулярна и другой.

Доказательство. Пусть плоскости α и β параллельны друг другу и прямая a перпендикулярна плоскости α (рис. 101). Значит, a пересекает α, а потому (по лемме 9.2) она пересекает и параллельную ей плоскость β в некоторой точке B.

Через точку B проходит плоскость, перпендикулярная прямой a; обозначим ее γ. Она параллельна плоскости α (по теореме 9.1). Но плоскость β параллельна плоскости α по условию и тоже проходит через точку B. Так как через B проходит только одна плоскость, параллельная плоскости α (по теореме 9.2), то β и γ совпадают. И так как $a \perp \gamma$, то $a \perp \beta$. ■

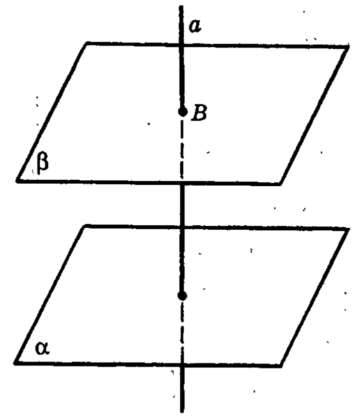


Рис. 101

Замечание. Итак, чтобы построить перпендикуляр к данной плоскости, достаточно провести его к плоскости, параллельной данной.

На практике, например, когда нужно подпереть потолок или перекрытие, упирают столб перпендикулярно полу и тем самым опускают перпендикуляр на потолок.

Задачи

Разбираемся в решении

9.1.(4). Какой вид имеют сечения куба, перпендикулярные его диагонали? Какое из них имеет наибольшую площадь? Чему она равна в кубе с ребром 1?

Решение.

Такие сечения мы уже знаем (задача 7.7). Одно из них — плоскостью B_1D_1A. Все остальные будут ему параллельны (?).

Разберемся сначала с формой этих сечений. Для удобства будем считать, что переменное сечение движется параллельно себе по направлению от вершины A_1 к вершине C. Пусть точка K_1 — точка пересечения диагонали A_1C с плоскостью B_1D_1A. Пересекая отрезок A_1K_1 внутри его, переменное сечение будет треугольником (?). Сразу же заметим, что треугольник в сечении будет получаться и еще на одном участке диагонали — от точки K_2 — точки пересечения диагонали A_1C с (BDC_1) — до C. На участке K_1K_2 сечение можно легко нарисовать. Эта легкость обеспечивается теоремой о том, что две параллельные плоскости пересекаются третьей по параллельным прямым. Из рисунка 102 видно, что на этом участке сечение является шестиугольником.

Любопытный получился шестиугольник! У него все углы равны (?) и стороны, идущие через одну, равны между собой (?). Изучение свойств такого шестиугольника — прекрасное упражнение в геометрии.

Однако вернемся к нашей задаче. Следующий вопрос — о наибольшей площади такого сечения. Прежде чем писать для нее формулу и вычислять ее наибольшее значение, попытаемся предсказать результат.

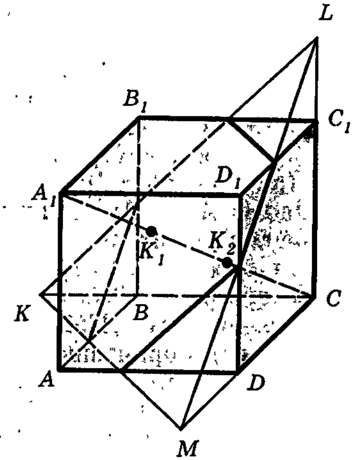


Рис. 102

Представьте себе, что вы разглядываете это переменное сечение в направлении диагонали A_1C, от A_1 к C. А еще лучше возьмите куб и нарисуйте на нем такие же сечения. После того как оно пройдет точку K_1, оно станет, как мы уже знаем, шестиугольником. Некоторое время после прохождения точки K_1, похоже, его площадь будет увеличиваться. До каких же пор?

Теперь представьте себе другого наблюдателя, который смотрит в направлении диагонали CA_1 на переменное сечение, движущееся от C к A_1. В силу симметрии ситуации он также будет видеть сечение, увеличивающееся по площади. Когда эти два увеличивающихся сечения встретятся, тогда и получится сечение с наибольшей площадью. Где же произойдет эта встреча? Из соображений симметрии заключаем, что это произойдет в середине отрезка A_1C.

Эти рассуждения подсказали нам ответ. Теперь перейдем к его обоснованию. Считать площадь шестиугольника произвольной формы непросто. Поэтому сделаем так. Три стороны этого сечения, лежащие в гранях $ABCD$, BB_1C_1C, CC_1D_1D, продолжим до пересечения с прямыми BC, CC_1, CD в точках K, L, M соответственно. (А почему в результате получится треугольник KLM?) Тогда S — площадь шестиугольника — можно найти как разность S_1 — площади треугольника KLM и $3S_2$, где S_2 — площадь малого треугольника в плоскости сечения при вершинах K, L, M. (А почему эти три площади равны?) Обозначим $|C_1L|=x$. Тогда

$$S_2=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot x^2\ (?),\ S_1=\frac{\sqrt{3}}{2}(1+x)^2\ (?)\ \text{и}\ S=\frac{\sqrt{3}}{2}(-2x^2+2x+1).$$

Из свойств полученного квадратного трехчлена, учитывая, что $0\leqslant x\leqslant 1$ (?), можно получить ответы на все вопросы к задаче. Мы знаем, что, кроме шестиугольного сечения, возможно и треугольное. До конца задачу доведите самостоятельно.

Дополняем теорию

9.2.(2). Докажите, что отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями, равны.

9.3.(2). $\alpha_1\parallel\alpha_2$, $\beta_1\parallel\beta_2$, $\alpha_1\cap\beta_1=a$, $\alpha_2\cap\beta_2=b$. Докажите, что прямые a и b параллельны.

9.4.(4). Докажите, что параллельность плоскостей равносильна параллельности перпендикуляров к этим плоскостям.

Рисуем

9.5.(2). Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Нарисуйте его сечение плоскостью KLM при таком расположении этих точек: а) K лежит внутри ребра A_1D_1, L лежит внутри ребра A_1B_1, M лежит внутри ребра AD; б) K лежит внутри ребра A_1B_1, L лежит внутри ребра A_1D_1, M лежит внутри ребра CD; в) K лежит внутри ребра A_1B_1, L лежит внутри ребра A_1D_1, M лежит внутри ребра DD_1; г) K лежит внутри ребра A_1B_1, L лежит внутри ребра A_1D_1, M лежит внутри ребра CC_1; д) K лежит внутри ребра A_1B_1, L лежит внутри ребра DD_1, M лежит внутри ребра BC.

9.6.(2). Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Нарисуйте его сечение плоскостью, которая проходит через: а) точку A и перпендикулярна (BB_1D); б) точку A и перпендикулярна (AA_1C); в) точку A и перпендикулярна (CB_1D_1); г) (AC_1) и перпендикулярна $(A_1B_1D_1)$; д) (AC_1) и перпендикулярна (DD_1B_1); е) (AC_1) и перпендикулярна (A_1B_1C); ж) (AD_1) и перпендикулярна (CDD_1); з) (AD_1) и перпендикулярна (ABC_1); и) (AD_1) и перпендикулярна (AA_1C).

9.7.(14). Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед, точка P — центр симметрии грани $A_1B_1C_1D_1$, точка O — середина диагонали A_1C. Нарисуйте его сечение плоскостью: а) проходящей через P и перпендикулярной (A_1B_1); б) проходящей через P и перпендикулярной (AD); в) проходящей через O и перпендикулярной (AA_1). Какого вида четырехугольник получается в таком сечении?

Представляем

9.8.(2). На сколько частей могут разбить пространство: а) две плоскости; б) три плоскости; в) четыре плоскости? Попытайтесь найти наибольшее число частей разбиения в общем случае, когда число плоскостей равно n.

9.9.(3). а) Через точку внутри грани прямоугольного параллелепипеда проведены плоскости, параллельные другим его граням. На сколько частей они разбили параллелепипед? Ответьте на тот же вопрос, если точка взята внутри прямоугольного параллелепипеда. б) Решите аналогичную задачу про тетраэдр. в) Ответьте на аналогичный вопрос, если такие плоскости проведены через середину каждого ребра тетраэдра.

Планируем

9.10.(2). Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Нарисуйте прямую, проходящую через середину ребра C_1D_1 и пересекающую прямые AA_1 и BC. Как вычислить длину отрезка этой прямой, заключенного между прямыми AA_1 и BC, если ребро куба известно?

9.11.(3). Точка Q — центр основания правильной пирамиды $PABC$. 1) Нарисуйте сечение пирамиды плоскостью, параллельной (ABC) и проходящей через: а) точку K внутри ребра PB; б) точку L внутри грани PAC; в) точку M внутри отрезка PQ. Какой по форме треугольник получается в этих сечениях? 2) Пусть через точку N, лежащую внутри PQ, проведены два сечения, параллельные двум боковым граням пирамиды. Докажите, что они равны. 3) Как вычислить длину общего отрезка двух сечений из п. 2, если известны боковое ребро пирамиды, угол при ее вершине и $|PN|$?

9.12.(3). Точка Q — центр основания правильной пирамиды $PABCD$. а) Нарисуйте ее сечение плоскостью, параллельной (ABC) и проходящей через точку внутри отрезка PQ. Какой четырехугольник получился в этом сечении? б) Через середину высоты пирамиды проходят два сечения, параллельные противоположным боковым граням пирамиды. Как вычислить длину их общего отрезка, если известны боковое ребро и высота пирамиды? в) Ответьте на тот же вопрос, если два сечения проведены через середину высоты пирамиды параллельно соседним боковым граням.

Ищем границы

9.13.(3). В правильной пирамиде $PABCD$ рассматриваются сечения плоскостью, параллельной (PKL), где точка K — середина ребра AD, а точка L — середина ребра BC. Какое из этих сечений имеет наибольшую площадь? Чему она равна в пирамиде, у которой все ребра равны 1?

9.14.(3). В правильной четырехугольной пирамиде со стороной основания d и углом при вершине φ через центр основания проведено сечение, параллельное боковой грани. Найдите периметр и площадь этого сечения. Исследуйте их в зависимости от φ.

9.15.(4). Дан правильный тетраэдр. Переменная плоскость перпендикулярна отрезку, соединяющему середины его противоположных ребер. а) Докажите, что четырехугольник, полученный в сечении тетраэдра такой плоскостью, является прямоугольником. б) Может ли он быть квадратом? в) Будет ли это выполняться для произвольной правильной треугольной пирамиды? г) В каких границах находится площадь такого сечения в правильном тетраэдре с ребром 1? д) Можете ли вы установить, в каких границах находится периметр такого сечения в правильной треугольной пирамиде с ребром основания d_1 и боковым ребром d_2?

9.16.(4). В правильной четырехугольной пирамиде проводится сечение, перпендикулярное: а) диагонали основания; б) ребру основания; в) боковому ребру. Какую оно может иметь форму? Можете ли вы установить, в каких границах находятся площадь и периметр такого сечения, если все ребра пирамиды равны 1?

Доказываем

9.17.(2). Докажите, что: а) параллельны противоположные грани прямоугольного параллелепипеда; б) параллельны основания прямой призмы. (Две плоские фигуры называем параллельными, если они лежат в параллельных плоскостях.)

9.18.(2). Плоскости α и β перпендикулярны плоскости γ и проходят через две параллельные прямые плоскости γ. Докажите, что плоскости α и β параллельны. Обобщите это утверждение.

9.19.(3). Три параллельные плоскости пересекаются двумя прямыми. Докажите, что длины полученных отрезков составляют пропорцию. Сформулируйте и проверьте обратное утверждение.

Исследуем

9.20.(3). $\alpha \parallel \beta$, $\gamma \perp \alpha$, $\gamma \perp \beta$. Из каких двух утверждений (из данных трех) можно вывести третье?

9.21.(3). Из каких трех утверждений можно вывести четвертое: $\alpha_1 \perp \alpha_2$, $\beta_1 \perp \beta_2$, $\alpha_1 \parallel \beta_1$, $\alpha_2 \parallel \beta_2$?

9.22.(4). Пусть $PABC$ — правильный тетраэдр, точка Q — центр его основания, точка K лежит внутри ребра PB. Нарисуйте его сечение плоскостью, проходящей через точку K и перпендикулярной: а) (BC); б) (PB); в) (PC); г) (PQ). Какое из них имеет бо́льшую площадь (в зависимости от положения точки K на ребре)?

Прикладная геометрия

9.23.(4). На горизонтальной плоскости закреплен крюк. К нему с помощью трех веревок надо подвесить кольцо так, чтобы его плоскость также была горизонтальной. Как вы это сделаете?

Участвуем в олимпиаде

9.24.(3). Дана четырехугольная пирамида с выпуклым основанием. Докажите, что в ее сечении можно получить параллелограмм.

§ 10. Параллельность прямой и плоскости

10.1. Классификация взаимного расположения прямой и плоскости

Если прямая не лежит в данной плоскости, то она имеет с нею не более одной общей точки (согласно аксиоме 3). Поэтому для взаимного расположения прямой и плоскости мыслимы три случая.

1. *Прямая лежит (содержится) в плоскости.*

2. *Прямая имеет с плоскостью только одну общую точку.* Тогда говорят, что прямая пересекает плоскость.

3. *Прямая не имеет с плоскостью общих точек.*

Определение.

Если прямая и плоскость не имеют общих точек, то они называются параллельными.

Говорят также, что плоскость параллельна прямой или что прямая параллельна плоскости. Для параллельности прямой a и плоскости α применяется обозначение $a \parallel \alpha$ или $\alpha \parallel a$.

Существование прямых, параллельных плоскости, очевидно, так как любая прямая, лежащая в одной из двух параллельных плоскостей, не имеет с другой общих точек и потому ей параллельна (рис. 103). Так что через одну точку, не лежащую в данной плоскости, проходит много прямых, параллельных этой плоскости. Как показывает следующая лемма, все такие прямые заполняют плоскость, параллельную данной.

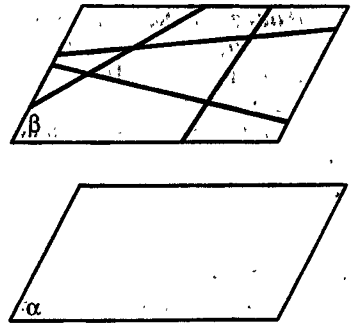


Рис. 103

Лемма 10.1 *(о плоскости параллелей).*

Прямые, параллельные данной плоскости и проходящие через данную точку, не лежащую в этой плоскости, содержатся в плоскости, параллельной данной, и заполняют ее.

Доказательство. Пусть точка A не лежит в плоскости α, а плоскость β проходит через A и параллельна α. Тогда все прямые, которые лежат в β и проходят через A, не имеют с α общих точек, т. е. параллельны α. Такие прямые заполняют всю плоскость β. Других прямых, проходящих через A и параллельных α, нет. Действительно, любая прямая, проходящая через A и пересекающая плоскость β, пересекает и плоскость α (по лемме 9.2). ■

10.2. Признак параллельности прямой и плоскости

Теорема 10.1 *(признак параллельности прямой и плоскости).*

Если прямая параллельна некоторой прямой, лежащей в данной плоскости, но сама не содержится в ней, то она параллельна этой плоскости.

Доказательство. Пусть прямая a параллельна прямой b, лежащей в плоскости α, но не лежит в плоскости (рис. 104). Если бы a пересекала плоскость α, то по лемме 3.1 и параллельная ей прямая b должна была бы пересекать плоскость α. Но b не пересекает α, так как $b \subset \alpha$. Поэтому a не пересекает α, т. е. $a \| \alpha$. ■

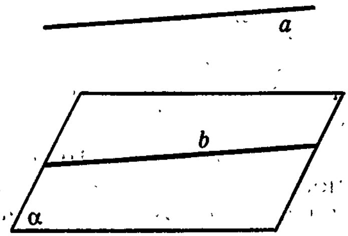


Рис. 104

Замечание. Теорему 10.1 легко доказать и не ссылаясь на лемму. Если $b \| a$, то эти прямые лежат в одной плоскости β и $b = \alpha \cap \beta$. И так как a не пересекается с b, то a не пересекается с α.

10.3. Второй признак параллельности плоскостей

Теорема 10.1 позволяет доказать часто употребляющийся признак параллельности плоскостей:

Теорема 10.2.

Если две пересекающиеся прямые, лежащие в одной плоскости, соответственно параллельны двум прямым, лежащим в другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

Доказательство. Пусть даны две плоскости α и β, в плоскости α лежат прямые a и b, а в плоскости β лежат прямые a_1 и b_1. Пусть, кроме того, $a \| a_1$, $b \| b_1$ и a_1 и b_1 пересекаются в точке O (рис. 105). По теореме 10.1 прямые a_1 и b_1 параллельны плоскости α. По лемме 10.1 прямые a_1 и b_1 лежат в плоскости, параллельной плоскости α и проходящей через точку O. Плоскостью, проходящей через точку O, в которой лежат прямые a_1 и b_1, является плоскость β. Поэтому $\beta \| \alpha$. ■

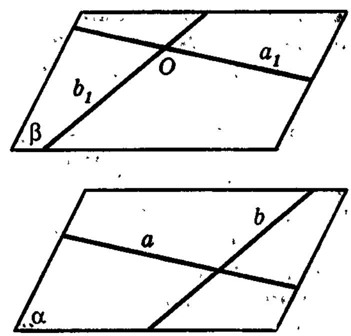


Рис. 105

Задачи

Разбираемся в решении

10.1. В правильном тетраэдре $PABC$ с ребром 2 через точку K — середину ребра PA — проводится сечение, параллельное (BC). В каких границах находятся его площадь и периметр?

Решение.

Приведем решение этой несложной задачи, ибо в ней есть некоторые «тонкости».

Прежде всего, какова форма сечения? Для того чтобы установить это, полезно (но необязательно) представить себе некую переменную плоскость, удовлетворяющую условию задачи. В нашем случае такой плоскостью является, например, плоскость, проходящая через прямую $(KL)\|(BC)$ (рис. 106). Представим себе, что такая плоскость вращается вокруг (KL). Что же увидим в сечении тетраэдра такой плоскостью?

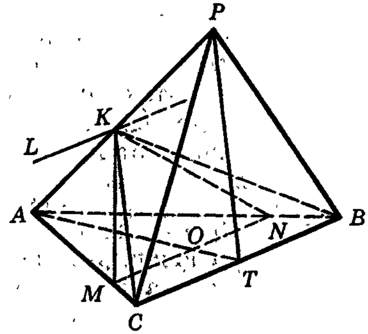


Рис. 106

Увидим треугольник с вершиной в точке K, одна из сторон которого параллельна (BC) (?). Такая сторона может лежать в грани ABC и в грани PBC. При более внимательном взгляде обнаруживается, что треугольник этот равнобедренный и точка K — его вершина (?).

Треугольник KBC для большей общности также будем считать одним из возможных сечений. Эта оговорка необходима, так как по определению прямая, лежащая в плоскости, не является ей параллельной. А у нас прямая BC лежит в плоскости KBC. Эту оговорку (а также ей аналогичную для переменной плоскости, параллельной некоторой плоскости) примем на все задачи подобного рода.

Кроме того, нельзя забывать о плоскости PKL. Сечение тетраэдра этой плоскостью — отрезок PA.

Итак, сечение тетраэдра в этой задаче — равнобедренный треугольник или отрезок. Можно договориться для некоторой общности результатов, что площадь отрезка принимается равной 0. (С периметром отрезка дело обстоит сложнее, но содержательно это уже ничего не добавляет.)

Разберемся теперь с площадью треугольного сечения. Пусть MN — переменное основание сечения, KO — переменная его высота. (Здесь надо объяснить, почему точка O находится на отрезке AT, где точка T — середина ребра BC.) Можно доказать, что наибольшее значение $|MN|$ равно $|BC|$, а наибольшее значение $|KO|$ равно $|KT|$ (?). Тогда наибольшее значение площади сечения равно $S_{\Delta KBC}$ (?).

Наименьшего значения площадь треугольного сечения не достигает, ибо основание $|MN|$; а значит, и площадь треугольника KMN (при ограниченности высоты KO) можно сделать сколь угодно малыми.

Перейдем к периметру сечения. Он равен $2|KM|+|MN|$. Наибольшее значение $|MN|$ равно $|BC|$, а наибольшее значение $|KM|$ равно $|KC|$ (?). Поэтому наибольшее значение периметра сечения — периметр треугольника KBC. Вычислите его.

Наименьшее значение периметра сразу определить трудно (?). Пусть $|AM|=x$. Тогда $|MN|=x$, $|KM|=\sqrt{x^2-x+1}$ (по теореме косинусов из треугольника AKM), а периметр $2\sqrt{x^2-x+1}+x$ $(0<x\leqslant 2)$ (?).

Можно доказать, что на этом промежутке периметр больше чем 2. Для этого достаточно решить неравенство $2\sqrt{x^2-x+1}+x>2$ и увидеть, что оно выполняется при всех $x>0$ (?).

Отсюда же следует, что периметр может быть сколь угодно близким к 2 (?). Значит, периметр сечения не имеет наименьшего значения. (Постарайтесь объяснить, почему мы взяли число 2.)

Итак, ответ: площадь треугольного сечения лежит в границах от 0 до $\sqrt{2}$, не включая 0; периметр треугольного сечения лежит в границах от 2 до $2+\sqrt{3}$, не включая 2.

Дополняем теорию

10.2.(2). Докажите такие признаки параллельности прямой и плоскости (при условии, что прямая не лежит в этой плоскости):

Прямая и плоскость параллельны, если: а) существует плоскость, параллельная данной прямой и плоскости; б) существует прямая, параллельная данной прямой и плоскости; в) существует прямая, перпендикулярная данной прямой и плоскости; г) существует плоскость, перпендикулярная данной прямой и плоскости.

10.3.(2). Прямая a параллельна плоскости α и лежит в плоскости β. Плоскости α и β пересекаются по прямой b. Докажите, что прямые a и b параллельны.

Если использовать понятие параллельной проекции, то после этой задачи можно сформулировать такое утверждение: «Прямая параллельна плоскости тогда и только тогда, когда она параллельна своей проекции на эту плоскость» (при условии, что она не лежит в этой плоскости). Проверьте его справедливость.

10.4.(2). Пусть $a \| b$, $a \| \alpha$, b имеет с плоскостью α общую точку. Докажите, что прямая b лежит в плоскости α.

10.5.(2). Плоскости α и β пересекаются по прямой b. Прямая a параллельна каждой из этих плоскостей. Докажите, что она параллельна прямой b.

10.6.(2). Докажите, что две плоскости перпендикулярны, если одна из них параллельна перпендикуляру к другой плоскости.

10.7.(3). Две прямые пересекаются, и каждая из них параллельна плоскости α. Докажите, что плоскость, в которой они лежат, параллельна плоскости α. Будет ли это верно, если данные прямые будут параллельны между собой?

10.8.(3). Даны две скрещивающиеся прямые. Докажите, что они лежат в единственной паре параллельных между собой плоскостей.

10.9.(3). Докажите, что: а) противоположные грани параллелепипеда параллельны; б) основания призмы параллельны (т. е. лежат в параллельных плоскостях).

Рисуем

10.10.(3). Дана правильная треугольная пирамида. Нарисуйте два ее параллельных сечения, проходящие через: а) среднюю линию основания и среднюю линию боковой грани; б) среднюю линию основания и медиану боковой грани; в) медианы двух боковых граней; г) высоту и среднюю линию боковой грани; д) высоту и медиану боковой грани. (Каждый раз выбираются два отрезка, лежащие на скрещивающихся прямых.)

10.11.(3). Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Нарисуйте два его сечения, параллельные между собой и проходящие через: а) (AC) и (B_1D_1); б) (AC) и (C_1D); в) (AC) и (B_1D); г) (AC) и (KL), где K и L — середины ребер A_1B_1 и CD; д) (AC) и (O_1O_2), где O_1 и O_2 — центры граней AA_1B_1B и $A_1B_1C_1D_1$.

Представляем

10.12.(3). Из точки A проводятся к плоскости α всевозможные наклонные: а) равной длины; б) произвольной длины. Какую фигуру образуют середины этих наклонных?

10.13.(3). Какие сечения параллелепипеда, проходящие через его три вершины, параллельны между собой? Укажите все пары таких сечений.

Планируем

10.14.(2). Пусть $ABCA_1B_1C_1$ — правильная призма, точка K — середина ребра AC. Нарисуйте точку L на ребре B_1C_1, такую, что $(KL)\|(AA_1B_1)$. Как вычислить длину отрезка KL, если ребра призмы известны?

Ищем границы

10.15.(2). Внутри диагоналей смежных граней куба, лежащих на скрещивающихся прямых, найдите такие две точки K и L, что (KL) параллельна грани куба. В каких границах лежит длина отрезка KL в кубе с ребром 1?

Доказываем

10.16.(2). 1) Постройте плоскость, параллельную данной прямой и проходящую через: а) данную точку; б) другую данную прямую. 2) Постройте плоскость, параллельную двум данным прямым и проходящую через данную точку.

10.17.(2). Постройте прямую, которая: а) лежит в данной плоскости и параллельна данной прямой; б) параллельна данной плоскости и пересекает две данные прямые; в) параллельна каждой из двух данных плоскостей.

10.18.(2). Точка A лежит в плоскости α, отрезок BC ей параллелен. Из точек B и C провели перпендикуляры к плоскости α — BB_1 и CC_1, причем A не лежит на (B_1C_1). а) Пусть треугольник ABC равнобедренный, $AB=AC$. Докажите, что треугольник AB_1C_1 тоже равнобедренный. б) Пусть треугольник ABC равносторонний. Докажите, что треугольник AB_1C_1 таковым не является. в) Пусть треугольник ABC прямоугольный ($\angle A=90°$). Докажите, что треугольник AB_1C_1 таковым не является. Будет ли это верно, если прямой угол будет в другой вершине треугольника ABC?

10.19.(2). Плоскости α и β пересекаются по прямой p. $a\perp\alpha$, $b\perp\beta$, $a\|\gamma$, $b\|\gamma$. Докажите, что $p\perp\gamma$.

10.20.(3). Точки A, B, C лежат в плоскости α и не лежат на одной прямой. Из них по одну сторону от плоскости α проведены три параллельных и равных отрезка: AA_1, BB_1, CC_1. Докажите что $(A_1B_1C_1)\|(ABC)$.

10.21.(3). Две стороны треугольника параллельны плоскости α. Докажите, что и третья его сторона параллельна плоскости α.

10.22.(3). $\alpha \cap \beta = p$, $\alpha \perp a$, $\beta \perp b$, $\gamma \| a$, $\gamma \| b$. Докажите, что $\gamma \perp p$.

Исследуем

10.23.(2). $a \perp b$, $b \perp \alpha$, $a \| \alpha$. Из каких двух утверждений следует третье?

10.24.(2). $a \| \alpha$, $b \| \beta$, $a \| b$, $\alpha \| \beta$. Из каких трех утверждений следует четвертое?

10.25.(2). Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Точка K_1 — середина ребра AB, точка K_2 — середина ребра AA_1, точка K_3 — середина ребра A_1B_1, точка K_4 — середина ребра CC_1, точка K_5 — середина ребра CD. Как расположены между собой такие прямые и плоскости: а) K_2K_3 и $K_1K_4K_5$; б) K_1K_4 и AB_1D; в) B_1K_5 и $K_2K_3K_4$; г) BD и $K_2K_3K_5$; д) B_1K_5 и K_2K_4D?

10.26.(2). В правильном тетраэдре $PABC$ точка Q — центр грани ABC. Нарисуйте сечения тетраэдра, проходящие через Q и параллельные одному его ребру. Какой они могут быть формы? Ответьте на тот же вопрос, если через Q проводить сечения, параллельные двум его ребрам; трем его ребрам.

10.27.(2). В правильной четырехугольной пирамиде $PABCD$ точка Q — центр основания. Установите форму сечения пирамиды плоскостью, проходящей: а) через Q параллельно (AD); б) через Q параллельно (PA); в) через (CD) параллельно (AB); г) через точки K и L — середины ребер BC и CD параллельно (BD); д) через (KL) параллельно (BD) и (AP); е) перпендикулярно (ABC).

10.28.(2). В правильной призме $ABCA_1B_1C_1$ точка K — середина ребра BB_1. 1) Нарисуйте сечение призмы плоскостью, проходящей через K и параллельной (AC). Какое из них: а) параллельно (B_1C); б) параллельно (A_1B); в) имеет наибольшую площадь; г) имеет наименьшую площадь? 2) Нарисуйте сечение призмы плоскостью, проходящей через K и параллельной (A_1C). Какую оно может иметь форму?

10.29.(2). Сторона AD четырехугольника $ABCD$ лежит в плоскости α. Из точек B и C проведены перпендикуляры BB_1 и CC_1 на плоскость α. Точки A и D не лежат на (B_1C_1). Будет ли четырехугольник AB_1C_1D четырехугольником того же вида, что и $ABCD$, если четырехугольник $ABCD$: а) параллелограмм; б) ромб; в) прямоугольник; г) квадрат; д) трапеция?

10.30.(2). На сторонах AB и CD прямоугольника $ABCD$ построены по одну сторону от его плоскости два равных треугольника ABK и CDL. Установите взаимное расположение (KL) и (ABC). Изменится ли это расположение, если вместо прямоугольника взять четырехугольники другого вида?

10.31.(2). Даны три прямые. Всегда ли существует плоскость, которая не имеет с ними общих точек?

10.32.(3). Плоскости α и β пересекаются по прямой p. Из точек A и B проводятся перпендикуляры к плоскости α: AA_1 и BB_1 — и перпендикуляры к плоскости β: AA_2 и BB_2. 1) Докажите, что: а) $(AA_1A_2) \| (BB_1B_2)$; б) эти плоскости пересекают как плоскость α, так и плоскость β по параллельным прямым. 2) Исследуйте положение (AB) по отношению к α и β, по отношению к p. 3) Могут ли прямые A_1B_1 и A_2B_2 быть параллельными?

Прикладная геометрия

10.33.(2). Объясните, почему кóзлы, на которых пилят бревна, обеспечивают горизонтальное положение бревна. Посмотрите на кóзлы и на перекладину в физкультурном зале. Они параллельны полу. Из чего это следует?

§ 11. Ортогональное проектирование

Мы постоянно встречаемся с различными способами проектирования (или, как еще говорят, проецирования) как в математике, так и в быту: оно применяется при изображении пространственных фигур на плоскости, в частности при фотографировании и в кино; тени от предметов являются их проекциями; на проектировании основано введение координат как на плоскости, так и в пространстве, изготовление чертежей, планов и т. д. Об одном из способов проектирования — параллельном проектировании — уже говорилось в § 4. В этом параграфе рассмотрим самый простой, но наиболее важный из способов проектирования в пространстве — ортогональное проектирование («ортогональный» в переводе значит «прямоугольный»).

Ортогональная проекция точки на прямую или на плоскость в стереометрии определяется дословно так же, как проекция точки на прямую в планиметрии.

Если точка не лежит на данной прямой (плоскости), то **ортогональной проекцией точки на прямую (на плоскость)** называется основание перпендикуляра, опущенного из этой точки на данную прямую (плоскость). Если точка лежит на прямой (на плоскости), то она есть своя проекция на эту прямую (плоскость) (рис. 107).

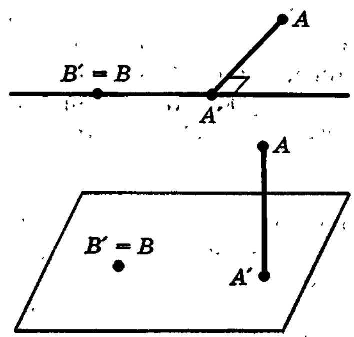


Рис. 107

Поскольку все прямые, перпендикулярные одной плоскости, параллельны друг другу, то ортогональное проектирование на плоскость является частным случаем параллельного проектирования и тем самым обладает всеми свойствами параллельного проектирования.

Ортогональной проекцией фигуры на прямую (на плоскость) называется множество ортогональных проекций всех точек этой фигуры на прямую (на плоскость) (рис. 108).

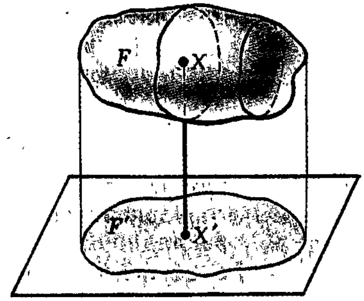


Рис. 108

Часто в пространстве ортогональное проектирование на прямую осуществляют, не опираясь непосредственно на его определение, а используя другой, обычно более удобный способ, выраженный в следующей теореме:

Теорема 11.1 *(о проекции на прямую).*

Ортогональной проекцией точки A на прямую a является точка пересечения прямой a с плоскостью, проведенной через точку A перпендикулярно прямой a. Иначе говоря, проектирование на прямую можно производить по перпендикулярным ей плоскостям (вместо перпендикулярных прямых).

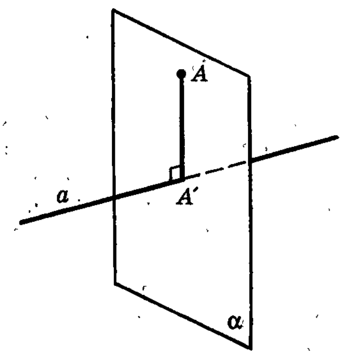


Рис. 109

Доказательство. Плоскость α, проходящая через данную точку A и перпендикулярная данной прямой a, всегда существует и единственна. Если $A \in a$, то точка A' пересечения α и a совпадает с A. Если же $A \notin a$, то отрезок AA' — перпендикуляр, опущенный из A на a (рис. 109). ■

Докажите самостоятельно следующее очевидное утверждение. Для доказательства второй его части примените теорему о проекции на прямую.

Лемма 11.1 *(о проекции отрезка).*

Ортогональной проекцией отрезка на плоскость является отрезок, за исключением того случая, когда отрезок перпендикулярен плоскости,— в этом случае его ортогональной проекцией является точка (рис. 110).

Ортогональной проекцией отрезка на прямую является отрезок, за исключением того случая, когда данный отрезок лежит в плоскости, перпендикулярной данной прямой,— в этом случае проекцией отрезка является точка (рис. 111).

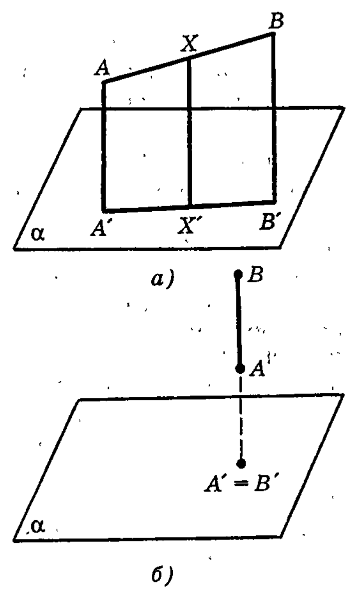
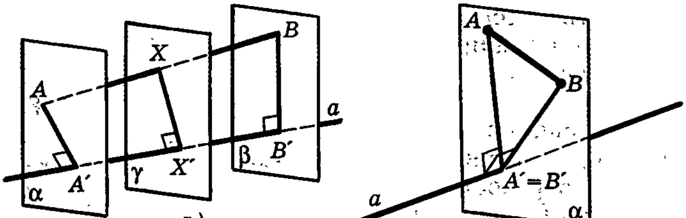


Рис. 110

Рассмотрите подробно все возможные случаи расположения отрезка относительно плоскости.

Ортогональное проектирование на одну, две, три плоскости широко используется в черчении. Изображение предмета в проекциях позволяет судить о его устройстве, без чего часто невозможно ни конструирование предметов, ни их изготовление.



а) Рис. 111 б)

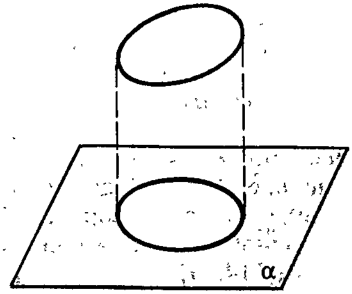


Рис. 112

Рассмотрим еще проекцию окружности на плоскость (когда плоскость окружности не перпендикулярна плоскости проекции). Кривая, которая является проекцией окружности в этом случае, называется **эллипсом** (рис. 112). Эллипсы обладают многими замечательными свойствами. Эллипс имеет центр симметрии и две взаимно перпендикулярные оси симметрии, которые называются большой и малой осями эллипса (докажите эти свойства). По эллипсам (эллиптическим орбитам) двигаются планеты вокруг Солнца. Солнце, однако, находится не в центре эллиптической орбиты планеты, а в точке, называемой **фокусом эллипса**. Окружность является частным случаем эллипса. Параллельной проекцией окружности на плоскость является эллипс (рис. 113) или отрезок прямой.

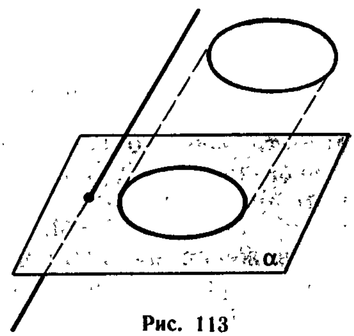


Рис. 113

В дальнейшем, говоря «проекция» или «проектирование», мы имеем в виду ортогональную проекцию или ортогональное проектирование, если нет специальных оговорок.

Дополнение к параграфу 11

Метод Монжа и начертательная геометрия

На ортогональном проектировании основан такой важный для инженеров раздел прикладной математики, как начертательная геометрия. Начертательная геометрия была создана знаменитым французским математиком Гаспаром Монжем (1746—1818)[1]. В ее основе лежит идея о том, что

[1] Г. Монж был не только геометром, но и общественным деятелем в период французской буржуазной революции. Он был морским министром и организатором национальной обороны, одним из создателей Политехнической школы в Париже.

положение любой точки пространства всегда можно задать ее ортогональными проекциями на две взаимно перпендикулярные плоскости α_1 и α_2 (рис. 114, *а*).

Повернем плоскость α_1 вокруг прямой x пересечения α_1 и α_2 в направлении, указанном на рисунке 114, *а*, до совпадения с плоскостью α_2. После такого поворота обе плоскости изобразятся на одном и том же чертеже, называемом **эпюром** (рис. 114, *б*).

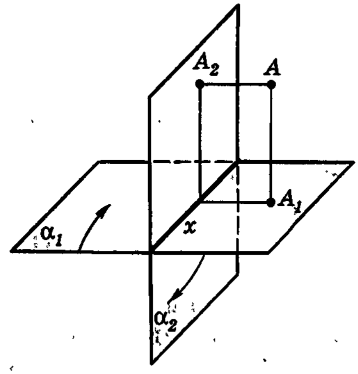
Прямая x называется **осью проекции**. Плоскости α_1 и α_2 разбивают все пространство на четыре четверти — **квадранта.**

В зависимости от того, в каком квадранте лежит точка A, изображения ее проекций A_1 и A_2 на эпюре находятся выше или ниже оси проекции (рис. 115), причем всегда отрезок A_1A_2 перпендикулярен прямой x.

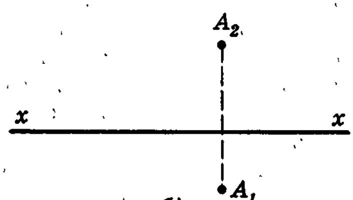
Ясно, что если на эпюре заданы изображения A_1 и A_2 проекций точки A, то они однозначно определяют положение точки A в пространстве.

Тем самым метод Монжа дает возможность строить эпюр по данной фигуре и, наоборот, восстановить фигуру по ее изображению на эпюре. Сам Монж говорил, что начертательная геометрия преследует две цели: во-первых, дать методы изображения на листе чертежа, имеющего только два измерения, а именно длину и ширину, любых тел природы, имеющих три измерения — длину, ширину и высоту, при условии, однако, что эти тела могут быть точно заданы.

Во-вторых, дать способ на основании точного изображения определять формы тел и выводить все закономерности, вытекающие из их формы и взаимного расположения.

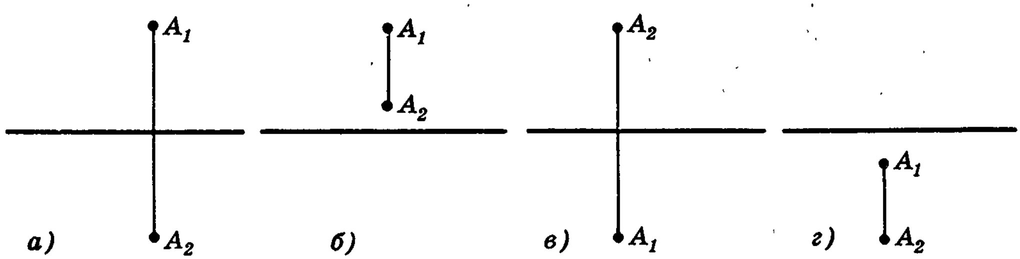


а)



б)

Рис. 114



а) *б)* *в)* *г)*

Рис. 115

Задачи

Разбираемся в решении

11.1. Может ли проекция острого угла при проектировании на некоторую плоскость быть прямым углом?

Решение.

Посмотрите на рисунок 116, *а*. Пусть угол ABC — данный угол. Плоскость α мы возьмем так, чтобы она была перпендикулярна биссектрисе BK этого угла. Она и будет у нас плоскостью проекций.

В таком положении проекцией угла ABC является угол AKC. Угол AKC развернутый, его величина $180°$.

Будем теперь поворачивать угол ABC вокруг (AC). В тот момент, когда точка B окажется на плоскости α (рис. 116, *б*), проекцией угла ABC на плоскость α будет он сам, т. е. острый угол. Изменение угла, являющегося проекцией данного, происходило непрерывно от $180°$ до острого угла. Значит, в какой-то момент он равен $90°$.

Все это можно увидеть, наблюдая за тенью от циркуля, освещенного настольной лампой.

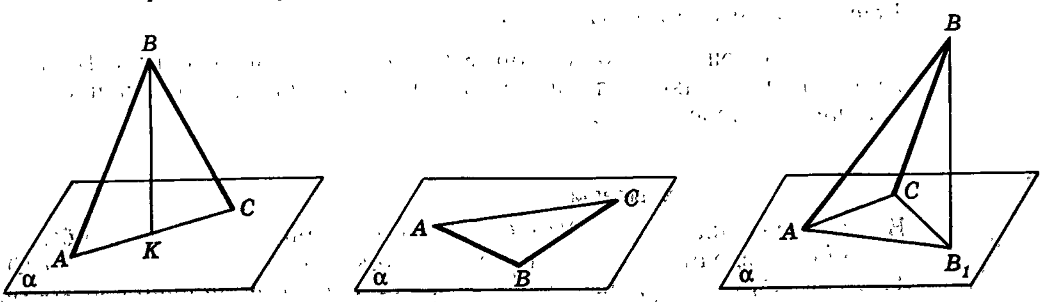
Любопытно заметить, что мы нигде не воспользовались тем, что проектирование ортогональное. Значит, полученный результат верен для произвольного параллельного проектирования. И это можно увидеть, наблюдая за тенью от циркуля.

Задача может быть решена и вычислением. Посмотрите на рисунок 116, *в*. На нем угол ABC данный, $|AB|=|BC|$, точка B_1 — проекция точки B на плоскость α. Считая известными $|AC|$ и величину данного угла, можно вычислить расстояние от B_1 до (AC), при котором $(AB_1)\perp(CB_1)$ (?).

Итак, задача решена. И сразу же возникает похожая задача: «А верно ли это для тупого угла?» Точнее: «Может ли проекцией тупого угла быть прямой угол?» Решить ее можно теми же способами. Но есть третий, более изящный способ. Попробуйте найти его.

Дополняем теорию

11.2. Луч OA образует равные углы с лучами OB и OC. Докажите, что проекция луча OA на плоскость OBC лежит на прямой, проходящей



а) б) в)

Рис. 116

через биссектрису угла между лучами OB и OC. Сформулируйте и проверьте обратное утверждение.

11.3. Плоскости α и β пересекаются по прямой a. Точка A проектируется на α, β и a. Докажите, что A и эти ее проекции лежат в одной плоскости.

11.4. Докажите, что проектирование точки на прямую можно осуществить последовательным проектированием на две взаимно перпендикулярные плоскости, проходящие через эту прямую.

Какие следствия отсюда можно получить? (В первую очередь можно заинтересоваться инвариантами проектирования на прямую, т. е. выяснением тех свойств геометрических фигур, которые сохраняются при проектировании на прямую.)

Рисуем

11.5. Нарисуйте проекцию: а) диагонали куба на плоскость, проходящую через две диагонали его смежных граней; б) диагонали куба на плоскость сечения, являющегося правильным шестиугольником; в) куба на плоскость, перпендикулярную его диагонали; г) диагонали на прямую, проходящую через другую диагональ.

11.6. Дан правильный тетраэдр. Нарисуйте проекцию: а) одной его грани на плоскость другой его грани; б) его сечения, являющегося квадратом, на плоскость одной из граней; в) тетраэдра на плоскость, перпендикулярную его ребру; г) тетраэдра на плоскость, перпендикулярную прямой, проходящей через середины его противоположных ребер.

Представляем

11.7. Будет ли прямой такая линия, у которой является прямой ее проекция: а) на плоскость; б) на две плоскости; в) на прямую; г) на две прямые?

Ищем границы

11.8. Пусть $PABC$ — правильная пирамида со стороной основания 1 и высотой 2. Точка X — переменная точка ребра PB. Каковы границы для площади проекции треугольника AXC на: а) (ABC); б) (PAC)?

Решите задачу, если высота равна $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$.

11.9. Одна из диагоналей куба с ребром 1 параллельна плоскости α. В каких границах изменяются длины остальных его диагоналей при проектировании на плоскость α?

Доказываем

11.10 В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все грани — равные ромбы, в вершине A сходятся их равные углы. Докажите, что $(AA_1C_1) \perp (ABC)$.

11.11. Прямая образует равные углы с тремя прямыми данной плоскости, пересекающимися в одной точке. Докажите, что она перпендикулярна данной плоскости.

◈ Исследуем

11.12. Каким углом может быть проекция прямого угла на плоскость, не параллельную плоскости, в которой он лежит?

11.13. Треугольник проектируется на плоскость, не параллельную его плоскости. Возьмите треугольник того или иного вида в зависимости от его сторон и углов и выясните, какого вида может быть треугольник, являющийся его проекцией.

11.14. Проекция тетраэдра $PABC$ на (ABC) является квадратом.
а) Какое из его ребер является наибольшим?
б) Может ли его проекция на плоскость другой грани также быть квадратом?

11.15. Плоскости α и β перпендикулярны и пересекаются по прямой a. Пусть x — некоторая прямая, а x_α и x_β — ее проекции на данные плоскости. Равносильны ли два утверждения:

$$x_\alpha \perp a \text{ и } x_\beta \perp a?$$

Изменится ли результат, если плоскости α и β не будут перпендикулярными?

11.16. Являются ли инвариантами проектирования такие свойства и величины для плоских фигур: а) расстояние между точками; б) угол между лучами; в) выпуклость; г) центральная симметричность; д) симметричность относительно прямой; е) ограниченность?
(Проектирование рассматриваем на плоскость, не параллельную и не перпендикулярную плоскости данной фигуры.)

11.17. Четырехугольник проектируется на плоскость, не параллельную его плоскости. Каким по виду четырехугольником является его ортогональная проекция, если данный четырехугольник: а) ромб; б) прямоугольник; в) квадрат?

11.18. Некий четырехугольник проектируется на каждую из двух перпендикулярных плоскостей. При этом получились равные квадраты. Можете ли вы установить вид данного четырехугольника?

11.19. Некоторая фигура проектируется на две перпендикулярные плоскости. Если ее проекциями являются два правильных треугольника, то могут ли они оказаться неравными? Ответьте на такой же вопрос, если ее проекциями являются два квадрата; два круга.

Задачи к главе II

Находим величину

II.1. Пусть $PABCD$ — правильная четырехугольная пирамида. Ее боковое ребро равно 2, а угол между соседними боковыми ребрами равен φ. Через среднюю линию треугольника ABD, параллельную (BD), проводится сечение. Найдите его площадь, если оно: а) параллельно (PA); б) перпендикулярно (PC).

Ищем границы

II.2. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все боковые грани — квадраты со стороной 1. Точка K — середина ребра AC, точка L — середина ребра AB, точка M — середина ребра BB_1, точка N — переменная точка ребра AA_1. Проводятся сечения призмы плоскостями KLM и BCN. В каких границах находится длина отрезка, являющегося пересечением этих сечений?

II.3. Дана правильная треугольная призма с ребром 1. Концы переменного отрезка лежат на двух скрещивающихся диагоналях ее граней, а сам этот отрезок параллелен: а) плоскости основания призмы; б) плоскости третьей ее боковой грани. В каких границах лежит длина такого отрезка?

II.4. В правильной треугольной призме с ребром 1 проводятся сечения, перпендикулярные: а) медиане одного из оснований; б) диагонали одной из граней; в) прямой, проходящей через одну из вершин и середину ребра, не лежащего с ней в одной грани. Можете ли вы установить, когда площадь такого сечения достигает наибольшего значения?

II.5. Дан куб. Нарисуйте отрезок, концы которого лежат на двух скрещивающихся прямых, проходящих через его ребра, а сам он пересекает прямую, проходящую через ребро куба и скрещивающуюся с первыми двумя прямыми. В каких границах лежит длина такого отрезка, если ребро куба равно 1?

Доказываем

II.6. Через каждую из двух скрещивающихся диагоналей боковых граней правильной треугольной призмы проводятся два сечения так, что они параллельны другой из этих диагоналей. Докажите, что эти сечения равны.

Исследуем

II.7. Равнобедренный прямоугольный треугольник ABC является ортогональной проекцией треугольника $A_1B_1C_1$. Исследуйте, какого вида может быть треугольник $A_1B_1C_1$.

II.8. $a \parallel b$, $a \perp b$, $a \perp \alpha$, $b \perp \beta$, $a \parallel \alpha$, $b \parallel \beta$, $\alpha \parallel \beta$, $\alpha \perp \beta$. Выберите любое из этих утверждений и установите, из каких оставшихся оно будет следовать.

II.9. В пирамиде $PABC$ проекции точек P и B на (AC) совпадают. а) Докажите, что проекция точки P на плоскость основания лежит на высоте основания или на ее продолжении. б) Будут ли совпадать проекции точек A и C на (PB)? в) Пусть, кроме того, совпадают проекции точек P и C на (AB). Какие следствия вы можете из этого получить? г) Сформулируйте сами задачи, являющиеся продолжением этих.

II.10. Через центр боковой грани правильной треугольной призмы проводится плоскость, параллельная двум скрещивающимся диагоналям других боковых граней этой призмы. Можете ли вы вычислить площадь сечения призмы этой плоскостью, если все ребра призмы равны 1?

II.11. Пусть $PABC$ — правильный тетраэдр, точка K — середина ребра AB, точка L — середина ребра PC. Установите форму сечения тетраэдра плоскостью, проходящей: а) перпендикулярно (ABC) и параллельно (AB); б) перпендикулярно (KL); в) параллельно (PK) и (AL); г) через K и параллельно (PB); д) через P и параллельно (KL).

II.12. В пирамиде $PABCD$ все ребра равны. Установите форму сечения этой пирамиды плоскостью, проходящей: а) параллельно (PAD); б) через (KL) параллельно (BD); в) параллельно (PKL); г) перпендикулярно (PCD) и (PAB); д) параллельно (PKD), если точка K — середина ребра AB, точка L — середина ребра AD.

II.13. 1) Может ли быть квадратом сечение таких многогранников: а) правильной пирамиды; б) тетраэдра, у которого в основании равносторонний треугольник, а одна боковая грань — равнобедренный треугольник, плоскость которого перпендикулярна плоскости основания; в) произвольного тетраэдра; г) куба (при этом плоскость сечения не параллельна плоскости его грани)? 2) Сами возьмите какой-либо многогранник и ответьте на тот же вопрос. 3) Если в сечении может получиться квадрат, то вычислите его сторону, задав некоторые длины ребер данного многогранника.

II.14. Все плоские углы при одной из вершин тетраэдра прямые. Можно ли в сечении такого тетраэдра получить: а) прямоугольный треугольник; б) остроугольный треугольник; в) тупоугольный треугольник; г) треугольник любой наперед заданной формы?

II.15. Все плоские углы при вершине P тетраэдра $PABC$ прямые. а) Докажите, что в его основании лежит остроугольный треугольник. б) В какую точку основания проектируется вершина P? в) Как, зная боковые ребра, вычислить его высоту? г) Пусть известны площадь основания и площадь боковой грани. Найдите площадь проекции этой боковой грани на основание. д) Пусть известны площади всех боковых граней. Сможете ли вы найти площадь основания? е) Докажите, что суммы квадратов его противоположных ребер равны. ж) Как вы думаете, верны ли обратные утверждения к полученным вами в этой задаче?

II.16. Две правильные четырехугольные пирамиды, все ребра которых равны, имеют общее основание. Нарисуйте сечение, которое проходит через центр основания и середины двух соседних боковых ребер одной из пирамид. Чему равна его площадь, если ребро пирамиды равно 1? Пусть плоскость такого сечения движется параллельно самой себе. Можете ли вы установить, в каких границах лежит его площадь?

Участвуем в олимпиаде

II.17. Плоскость, двигаясь параллельно самой себе, пересекает правильный тетраэдр, ребро которого равно 1. Докажите, что периметр сечения меньше 3.

II.18. Постройте неплоскую замкнутую ломаную, у которой все звенья равны и все углы между соседними звеньями равны.

II.19. Две прямые a и b скрещиваются. На прямой a взят отрезок AB. Через прямую b проводятся всевозможные плоскости и на каждую из них проектируется отрезок AB. Есть ли среди них такая, проекция на которую является наименьшей? Если есть, то как ее построить?

II.20. Существует ли такой тетраэдр, проекция которого на любую плоскость является четырехугольником?

II.21. Выпуклый многогранник проектируется на плоскость. У многогранника n граней. Сколько сторон может быть у многоугольника, являющегося его проекцией? Начните исследование с $n=4$.

Итоги главы II

Три теоремы существования и единственности можно назвать основными в данной главе.

Теорема 7.2. Через каждую точку проходит плоскость, перпендикулярная данной прямой, и притом только одна.

Теорема 7.6. Через каждую точку проходит прямая, перпендикулярная данной плоскости, и притом только одна.

Теорема 9.2. Через каждую точку, не лежащую на данной плоскости, проходит плоскость, параллельная данной плоскости, и притом только одна.

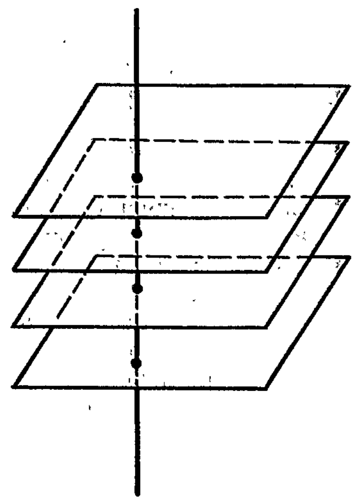


Рис. 117

Теоремы 7.2. и 7.6. естественно дополняются следующими предложениями:

Теорема 9.1. Две плоскости, перпендикулярные одной прямой, параллельны.

Теорема 7.4. Две прямые перпендикулярные одной и той же плоскости, параллельны.

На обратные им предложения можно смотреть как на два признака перпендикулярности прямой и плоскости.

Теорема 7.5. Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна некоторой плоскости, то и другая прямая перпендикулярна этой плоскости.

Теорема 9.3. Если две плоскости параллельны, то прямая, перпендикулярная одной из них, перпендикулярна и другой.

Все эти теоремы дают возможность представлять себе пространство «расслоенным» на семейство параллельных плоскостей, перпендикулярных некоторой прямой (рис. 117), или «расслоенным» на семейство параллельных прямых, перпендикулярных некоторой плоскости (рис. 118).

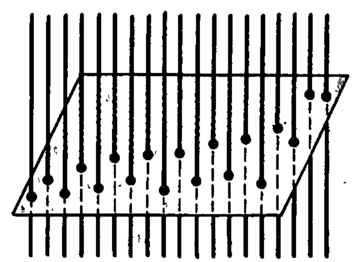


Рис. 118

Конечно, надо помнить следующие очень часто применяющиеся признаки:

Признак перпендикулярности прямой и плоскости (**теорема 7.1**): прямая, перпендикулярная двум пересекающимся прямым, лежащим в данной плоскости, перпендикулярна этой плоскости.

Признак перпендикулярности плоскостей (**теорема 8.1**): если плоскость проходит через перпендикуляр к другой плоскости, то эти плоскости взаимно перпендикулярны.

Признак параллельности плоскостей (**теорема 10.2**): если две пересекающиеся прямые, лежащие в одной плоскости, соответственно параллельны двум прямым, лежащим в другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

Признак параллельности прямой и плоскости (**теорема 10.1**): если прямая параллельна некоторой прямой, лежащей в данной плоскости, но сама не содержится в ней, то она параллельна этой плоскости.

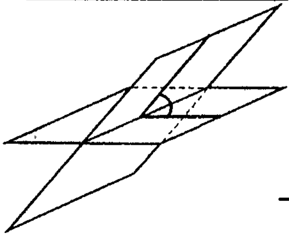
Наконец, полезно помнить следующие предложения, в которых речь идет о прямых, принадлежащих некоторой плоскости:

Теорема о плоскости перпендикуляров (**теорема 7.3**): прямые, перпендикулярные данной прямой в данной ее точке, лежат в одной плоскости и покрывают ее.

Лемма о плоскости параллелей (**лемма 10.1**): прямые, параллельные данной плоскости и проходящие через одну точку, не лежащую в этой плоскости, содержатся в плоскости, параллельной данной, и заполняют ее.

Свойство 2 перпендикулярных плоскостей: прямая, имеющая общую точку с одной из двух взаимно перпендикулярных плоскостей и перпендикулярная другой плоскости, лежит в первой из них.

Посоветуем вам, повторяя содержание этой главы и разбирая то или иное предложение стереометрии, подумать, какое планиметрическое утверждение аналогично ему, и, наоборот, взяв планиметрическое утверждение о параллельности или перпендикулярности, подумать, каков его аналог (или аналоги) в стереометрии. Такое сравнение планиметрии и стереометрии позволит вам глубже понять содержание этой главы.



Расстояния и углы

Если в главе II мы начали изучение «строительной» геометрии, то в этой небольшой главе мы начнем знакомство с «измерительной» геометрией, которое затем будет продолжено в 11-м классе в главах «Объемы тел» и «Поверхности». Здесь же мы ограничимся измерением простейших из геометрических величин — расстояний между фигурами (§ 12 и § 13) и углов (§ 14).

Слово «угол» в геометрии несет большую нагрузку и применяется в различных смыслах (чаще всего с дополнительными определениями). И здесь мы будем говорить как об углах — пространственных фигурах (о двугранных и трехгранных углах), так и о величинах (мерах) углов между прямыми и плоскостями.

Понятие расстояния между фигурами позволит нам по-новому взглянуть на параллельные прямые и плоскости — как на прямые и плоскости, идущие на постоянном расстоянии друг от друга.

§ 12. Расстояние между фигурами

12.1. Расстояние от точки до фигуры

Задача измерить расстояние до данного объекта или между двумя объектами постоянно встречается в практике: расстояние до другого берега реки, между двумя домами, от материка до острова и т. п. Все эти расстояния считаются, понятно, по кратчайшему пути, как, например, от данного места до ближайшей точки на другом берегу. Так же определяется и расстояние между фигурами в геометрии. Сначала рассмотрим частный случай — расстояние от точки до фигуры, т. е. когда одна из фигур — точка.

Определение.

Расстоянием от точки A до фигуры F называется расстояние от этой точки до ближайшей к ней точки фигуры F (если есть такая точка в фигуре F). Это расстояние будем обозначать $|AF|$.

Ближайшая к A точка фигуры F — это такая точка $B \in F$ (рис. 119), что для всех точек X фигуры F

$$|AB| \leqslant |AX|. \tag{12.1}$$

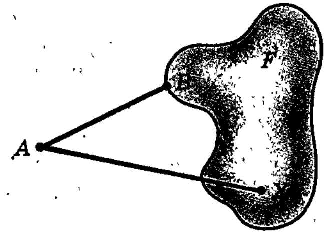


Рис. 119

Иначе говоря, если точка A не принадлежит фигуре F, то отрезок AB — **кратчайший из отрезков** AX, соединяющих точку A с точками фигуры F. Если же $A \in F$, то точка A оказывается ближайшей к самой себе, и потому $|AF| = |AA| = 0$. Дальше мы этот случай исключаем из рассмотрения и, говоря о расстоянии $|AF|$, будем подразумевать, что $A \notin F$.

В фигуре F может вовсе не быть точек, ближайших к данной точке A[1]. Такая ситуация имеет место в том случае, например, когда фигура F — это интервал PQ (т. е. отрезок PQ, но без его концов P и Q) и точка A лежит на прямой PQ, но не на отрезке PQ. Другой аналогичный пример: если фигура F получена исключением из плоскости какого-либо круга, то в этой фигуре нет точек, ближайших к центру этого круга (и вообще ни к одной его точке).

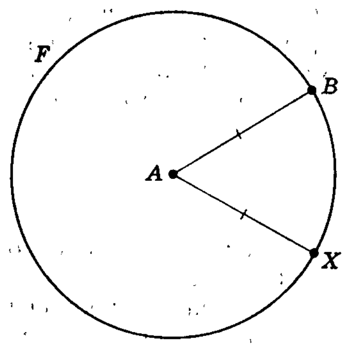


Рис. 120

В фигуре F может быть и бесконечное множество точек, ближайших к данной точке A. Например, если F — окружность и точка A — ее центр, то все точки окружности — ближайшие к центру A (рис. 120).

Определение расстояния от точки до фигуры было дано в планиметрии; разница в том, что теперь не требуется, чтобы они лежали в одной плоскости.

Рассмотрим несколько простых примеров.

1. *Расстояние от центра окружности до самой окружности равно радиусу.* Все точки окружности находятся на одном расстоянии от центра, они все ближайшие к нему (рис. 120).

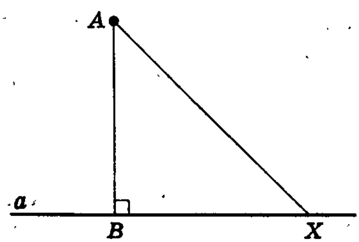


Рис. 121

[1] В случае, когда в фигуре F нет точек, ближайших к точке A, расстояние $|AF|$ определяется как расстояние до ближайшей к A точке на границе F (определение границы дано в § 20). Такие ближайшие точки есть всегда.

2. *Расстояние от точки A до прямой a равно длине перпендикуляра, опущенного из A на a.*

Это известно из планиметрии. Если AB — перпендикуляр, опущенный из A на a, $X \in a$ и $X \neq B$, то AB — катет, а AX — гипотенуза в треугольнике ABX (рис. 121). Поэтому $AX > AB$. Значит, основание перпендикуляра и есть ближайшая к A точка, а расстояние $|Aa|$ равно длине перпендикуляра AB. Здесь ближайшая к A точка прямой a только одна.

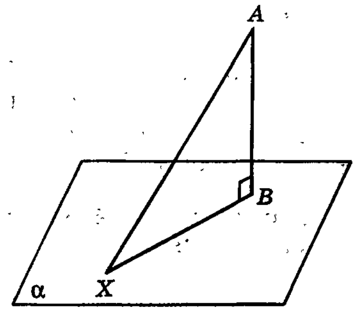


Рис. 122

3. *Расстояние от точки до плоскости равно длине перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость.*

Действительно, пусть AB — перпендикуляр, опущенный из точки A на плоскость α (рис. 122). Возьмем любую точку $X \in \alpha$, отличную от B. Треугольник ABX прямоугольный, и, значит, $AX > AB$, поэтому точка B — ближайшая к A точка плоскости α и расстояние $|A\alpha|$ равно длине перпендикуляра AB.

Заметим, что основание перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую или на плоскость,— это проекция точки A. Поэтому точка прямой или плоскости, ближайшая к данной точке, и проекция данной точки — это одно и то же.

12.2. Теорема о ближайшей точке

Посмотрите на рисунок 123. Можно заметить, что точка C фигуры F, лежащей в плоскости α, является одновременно ближайшей и к точке A, и к точке B — проекции A на плоскость α. Иначе говоря, подойти как можно ближе к точке A — это то же самое, что подойти как можно ближе к ее проекции B (конечно, при условии, что мы останемся в пределах данной фигуры F). Это известно из практики. Например, для того чтобы ближе подойти к человеку, стоящему на мачте или на вышке A, нужно подойти как можно ближе к ее основанию B. Охотник, стараясь подойти ближе к белке на дереве, подходит ближе к основанию дерева.

Прежде чем выразить и доказать это в виде теоремы, докажем одну лемму.

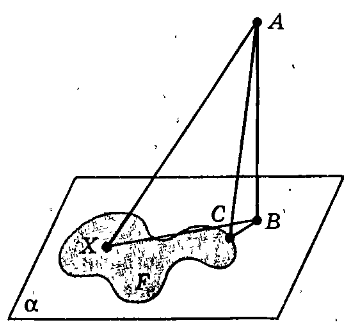


Рис. 123

Лемма 12.1.

Если A — данная точка, B — ее проекция на плоскость α, то для любой точки $X \in \alpha$

$$|AX|^2 = |AB|^2 + |BX|^2. \qquad (12.2)$$

Доказательство. Если $A \in \alpha$, то $A = B$ и $|AB| = 0$. Поэтому (12.2) верно.

Пусть теперь A не лежит в плоскости α. Тогда отрезок AB — это перпендикуляр, опущенный из точки A на α. Для любой точки $X \in \alpha$, отличной от B, треугольник ABX прямоугольный (рис. 122), и равенство (12.2) следует из теоремы Пифагора. Если же $X = B$, то $|BX| = 0$, и равенство (12.2) тоже верно. ■

Теперь обратимся к самой теореме о ближайшей точке.

Теорема 12.1 *(о ближайшей точке).*

Точка плоской фигуры является ближайшей к некоторой точке тогда и только тогда, когда эта точка фигуры ближайшая к проекции данной точки на плоскость фигуры.

Доказательство. Пусть заданы точка A и фигура F, лежащая в плоскости α. Пусть, далее, B — проекция A на α (рис. 123, когда $B \notin F$). Возьмем любую точку X фигуры F. Тогда по лемме 12.1

$$|AX|^2 = |AB|^2 + |BX|^2.$$

Тем самым квадраты расстояний $|AX|^2$ и $|BX|^2$ отличаются на постоянную $|AB|^2$. Поэтому если расстояние $|AX|$ ($|BX|$) становится наименьшим, то наименьшим становится и другое расстояние $|BX|$ ($|AX|$). А это и значит, что точка X, ближайшая к точке A, будет ближайшей к B и обратно. ■

Для случая, когда фигура в теореме о ближайшей точке — это прямая, из этой теоремы вытекает такое следствие:

Следствие 1 *(теорема о проекциях).*

Пусть A — данная точка, a — прямая, лежащая в данной плоскости α, и B — проекция A на α. Тогда проекции точек A и B на прямую a совпадают — это одна и та же точка (рис. 124).

Доказательство. Поставьте в теореме о ближайшей точке на место фигуры F прямую a и замените слова «ближайшая точка» равнозначным словом «проекция», получите теорему о проекциях. ■

Теорему о проекциях можно сформулировать и как теорему о трех перпендикулярах.

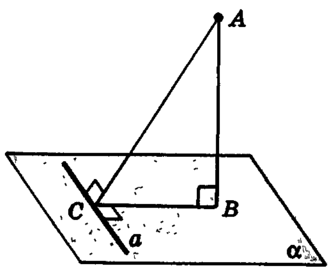


Рис. 124

Следствие 2 (*теорема о трех перпендикулярах*).

Прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна наклонной к этой плоскости тогда и только тогда, когда она перпендикулярна ее проекции.

Отрезки AC и BC (рис. 124) одновременно оказываются перпендикулярными прямой a: если один перпендикулярен ей, то и другой тоже.

Замечание 1. Из теоремы о ближайшей точке следует утверждение: из данной точки A в ближайшую точку плоской фигуры F можно попасть так: сначала в ближайшую к A точку B самой плоскости, а потом из точки B в ближайшую к ней точку фигуры F.

Замечание 2. Здесь в теореме о трех перпендикулярах имеем в виду прямую, проходящую через основание наклонной, но не делаем об этом оговорки в формулировке теоремы потому, что чуть позднее (в § 14), после того как будут определены углы между скрещивающимися прямыми, этой оговорки можно будет уже не делать.

12.3. Расстояние между фигурами

Рассмотрим теперь две фигуры F_1 и F_2. Их точки $A_1 \in F_1$ и $A_2 \in F_2$ называются их **ближайшими точками**, если для любых точек $X_1 \in F_1$ и $X_2 \in F_2$ выполняется неравенство $|A_1A_2| \leqslant |X_1X_2|$ (рис. 125). Иначе говоря, отрезок A_1A_2 является

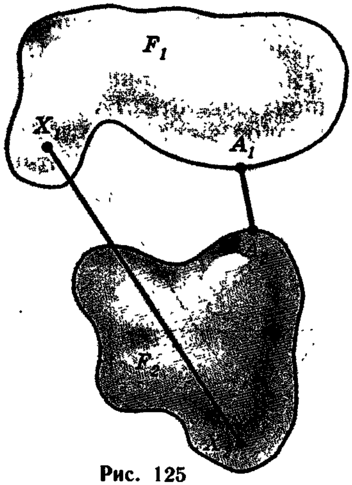


Рис. 125

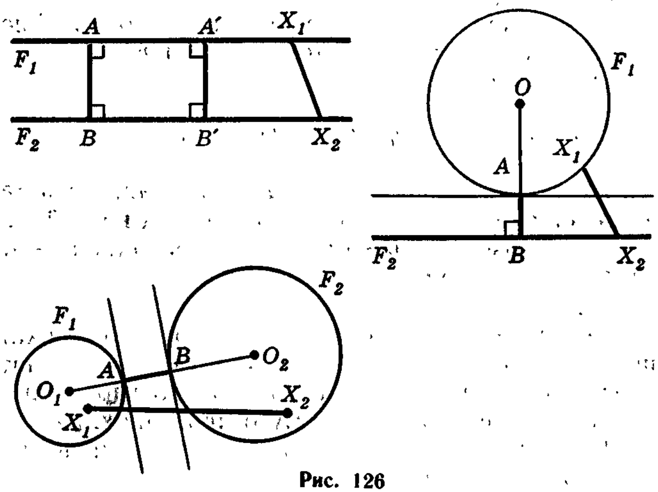


Рис. 126

кратчайшим среди всех отрезков, соединяющих точки фигур F_1 и F_2. Представление о нем дает вытянутая рука, когда вы с трудом достаете некоторый предмет.

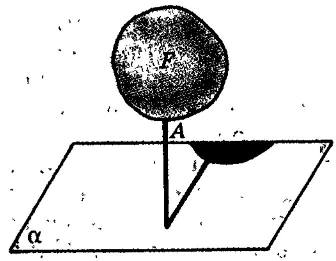


Рис. 127

Определение.

Расстоянием между двумя фигурами называется расстояние между ближайшими точками этих фигур, если такие точки существуют.

Расстояние от точки до фигуры является частным случаем расстояния между фигурами, когда одна фигура — точка.

Расстояние между фигурами F_1 и F_2 будем обозначать $|F_1F_2|$. На рисунке 126 приведены примеры ближайших точек фигур, лежащих в одной плоскости,— двух параллельных прямых, прямой и окружности, двух кругов.

Расстояние от любой фигуры до плоскости равно, очевидно, длине наименьшего из перпендикуляров, опущенных из точек фигуры на плоскость (предполагая, что фигура с плоскостью не имеет общих точек и у нее есть точка, ближайшая к плоскости) (рис. 127). Так, если провод провисает, то его расстояние до земли нужно считать от самой низкой его точки.

12.4. Расстояние между прямыми и плоскостями. Общие перпендикуляры

1. *Расстояние между параллельными плоскостями.* Для двух параллельных плоскостей есть прямая, перпендикулярная им обеим. Ее отрезок с концами на этих плоскостях — их общий перпендикуляр (рис. 128). Его длина даст расстояние между плоскостями. Чтобы доказать это, докажите лемму.

Лемма 12.2.

Параллельные отрезки с концами на двух параллельных плоскостях равны.

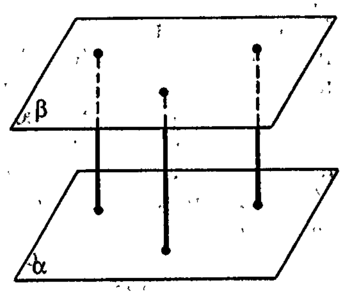


Рис. 128

Так как все общие перпендикуляры двух параллельных плоскостей параллельны друг другу (по теореме 7.4), то из леммы 12.2 вытекает, что они и равны друг другу. Поэтому все точки каждой из двух параллельных плоскостей находятся на одном и том же расстоянии от другой из этих плоскостей.

Это расстояние и есть расстояние между параллельными плоскостями. Оно равно длине любого общего перпендикуляра этих плоскостей. Эти перпендикуляры заполняют **слой** между параллельными плоскостями (рис. 128).

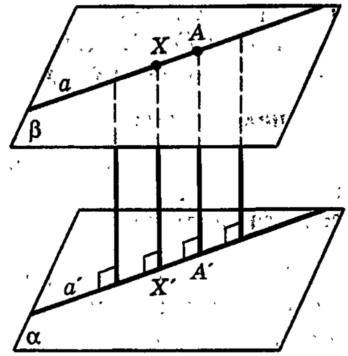


Рис. 129

Иначе говоря, ***параллельные плоскости проходят на постоянном расстоянии друг от друга, или слой между параллельными плоскостями имеет всюду одинаковую толщину.*** Параллельность плоскостей так и проверяют, измеряя толщину слоя между этими плоскостями. Так находят и высоту призмы. А именно, **высотой призмы** называется общий перпендикуляр ее оснований, а также его длина. Поэтому высота призмы — это расстояние между плоскостями ее оснований.

В двух оставшихся случаях — для прямой, параллельной плоскости, и для двух скрещивающихся прямых — используем следующее утверждение, вытекающее из только что полученных выводов.

Расстояние от любой фигуры, лежащей в одной из параллельных плоскостей, до другой плоскости равно длине общего перпендикуляра этих плоскостей.

2. *Расстояние между параллельными прямой и плоскостью.* Пусть прямая a параллельна плоскости α. Проведем через a плоскость $\beta \parallel \alpha$. Любой перпендикуляр AA', опущенный из точки $A \in a$ на α, является как общим перпендикуляром α и β, так и общим перпендикуляром a и α (рис. 129). Его длина равна расстоянию между a и α. Все такие перпендикуляры заполняют полосу между прямой a и прямой $a' \subset \alpha$ — проекцией прямой a на α.

Итак, ***прямая, параллельная плоскости, идет на постоянном расстоянии от этой плоскости.***

3. *Расстояние между скрещивающимися прямыми.* Пусть прямые a и b скрещиваются. Построим сначала общий перпендикуляр этих прямых.

Возьмем любую точку $M \in b$ и проведем через M прямую $c \parallel a$ (рис. 130). Пусть плоскость α проходит через b и c. Тогда $a \parallel \alpha$ (так как $a \parallel c$ и $c \subset \alpha$).

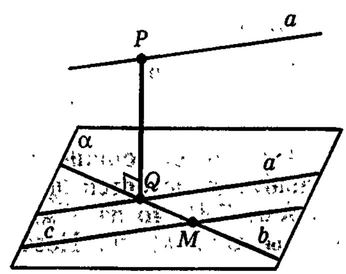


Рис. 130

Спроектируем прямую a на плоскость α. Получим прямую a'. Она пересекает прямую b в некоторой точке Q. (Если бы оказалось, что $a' \parallel b$, то, поскольку $a' \parallel a$, получили бы, что $a \parallel b$, т. е. противоречие с условием задачи.)

Точка $Q \in b$ является проекцией некоторой точки $P \in a$. Отрезок PQ — общий перпендикуляр скрещивающихся прямых a и b.

Так как точки P и Q — ближайшие точки прямой a и плоскости α, то они тем самым будут ближайшими и для прямых a и $b \subset \alpha$. Поэтому $|PQ| = |ab|$.

Итак, в каждом из разобранных случаев расстояние — длина общего перпендикуляра рассматриваемых объектов.

12.5. Расстояние и параллельность

▲ Параллельные прямые на плоскости (плоскости) определяются как прямые (плоскости), которые не пересекаются (на всем их бесконечном протяжении). Но реально имеем дело с конечными отрезками прямых и конечными кусками плоскостей, хотя бы и не идеальными, но прямыми и плоскими с той или иной точностью. Параллельность противоположных краев пола или доски, двух рельсов и т. п., так же как параллельность пола и потолка, двух противоположных стен или междуэтажных перекрытий, устанавливается не тем, что получается при их бесконечном продолжении. Никакой плотник не продолжает краев доски до бесконечности, как и строители, даже мысленно, не продолжают ни междуэтажных перекрытий, ни стен дома. Словом, на самом деле в теории параллельных прямых и плоскостей важны и имеют реальный смысл те свойства, которые относятся к их конечным отрезкам и кускам. По этим же свойствам производится построение параллельных прямых и плоскостей, а в реальности — их конечных кусков.

Важнейшим среди таких свойств, характеризующих параллельность прямых (плоскостей), является постоянство расстояния, т. е. равноудаленность точек одной прямой (плоскости) от другой. По доказанной теореме все общие перпендикуляры двух параллельных плоскостей равны.

Выполняется также обратное утверждение.

Концы равных перпендикуляров к данной плоскости, расположенные по одну сторону от нее, лежат в одной плоскости, параллельной данной, и заполняют ее. Докажите это самостоятельно.

Реальным воплощением отрезков, о которых идет речь, могут представляться столбы и колонны, стоящие на основании здания и подпирающие параллельное ему перекрытие. На колонны равной высоты опирается верхняя плоскость здания, например греческого храма (см. форзац). И в современном строительстве сплошь и рядом укладывают междуэтажные

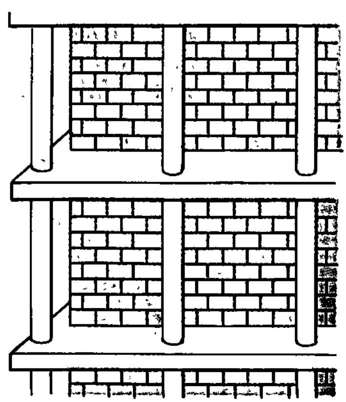


Рис. 131

перекрытия на вертикальных столбах равной высоты. Их верхние концы оказываются в плоскости, параллельной той, где лежат их основания (рис. 131). Другой пример: полки в книжном шкафу укрепляют на равных расстояниях на каждой из двух боковых стенок, так что полки лежат параллельно. Между ними лежат книги, и если, стоя прямо, они упираются в полку над ними, то, значит, они одной высоты. ▼

Задачи

Разбираемся в решении

12.1.(4). В наклонной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ каждое ребро основания равно 1. Ребро BB_1, равное 2, образует равные углы с ребрами BA и BC. Расстояние от B_1 до (ABC) равно 1. Вычислите расстояние между основаниями призмы.

Решение.

Прежде всего обратим внимание на то, что надо найти расстояние между основаниями призмы, т. е. между фигурами, лежащими в параллельных плоскостях, а не между самими параллельными плоскостями. Для такого случая естественно воспользоваться результатом задачи 12.40, *б*. Согласно формуле в этой задаче мы должны вычислить расстояние между параллельными плоскостями, расстояние между одним основанием призмы — возьмем ABC — и проекцией основания $A_1B_1C_1$ на (ABC). Но расстояние между плоскостями дано, значит, осталось вычислить другое расстояние, и задача будет решена.

Для нахождения другого расстояния необходимо спроектировать верхнее основание на плоскость нижнего. Для этого спроектируем вершины треугольника $A_1B_1C_1$. Начнем с вершины B_1 — это удобнее всего. Так как $\angle B_1BA = \angle B_1BC$, она проектируется на прямую, проходящую через биссектрису BK угла ABC (?). Но нам этого мало (?). Точка H — проекция точки B_1 — лежит на прямой BK. А точнее? На луче BK? На его продолжении? На отрезке BK? Ясно одно: она лежит не в точке B (?). Однозначно ответить на вопрос, где находится точка H — на луче BK или на его продолжении,— исходя из условия

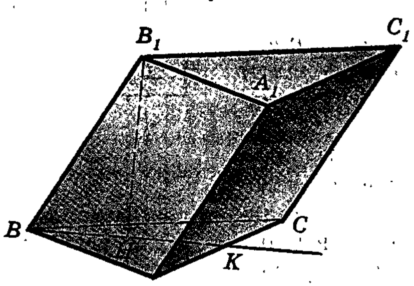


Рис. 132

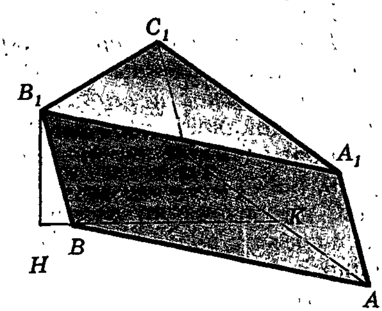


Рис. 133

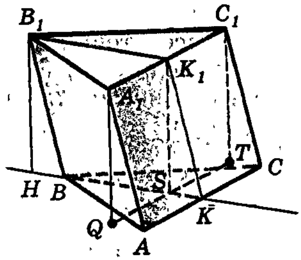


Рис. 134

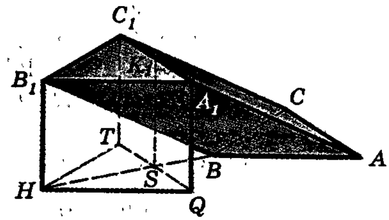


Рис. 135

задачи невозможно (?). Может быть случай, показанный на рисунке 132, а может быть случай, показанный на рисунке 133. Все зависит от вида призмы.

Решим сначала задачу, когда точка H лежит на луче BK. Выясним, лежит ли она на отрезке BK. Вычисляем $|BK|$ и $|BH|$, а затем сравниваем их между собой: $|BK|=\frac{1}{2}\sqrt{3}$, $|BH|=\sqrt{3}$, поэтому точка H лежит вне треугольника ABC. Теперь проекции точек A_1 и C_1 легко построить (?). Расстояние между треугольником ABC и проекцией треугольника $A_1B_1C_1$ равно $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ (?). Тогда искомое расстояние равно (по формуле задачи 12.40, *б*) $\frac{1}{2}\sqrt{7}$.

Перейдем теперь к ситуации, изображенной на рисунке 133. Пусть H — проекция точки B_1 — находится на продолжении луча BK, причем, как и в предыдущем случае, $|BH|=\sqrt{3}$. Теперь самое важное — установить положение проекций точек A_1 и C_1 по отношению к треугольнику, а еще точнее выяснить, как расположена по отношению к этому треугольнику прямая QT, являющаяся проекцией прямой A_1C_1 на (ABC) (точка Q — проекция точки A_1, а точка T — проекция точки C_1). Ясно (рис. 134), что $(QT)\|(AC)$ (?). Поэтому найдем $|KS|$:

$$|KS|=|KB|-|BS|.$$
$$|BS|=|HS|-|HB|=|B_1K_1|-|HB|$$

(точка K_1 — середина ребра A_1C_1 и точка S — точка пересечения (QT) и (BK)).

Обоснуйте приведенные выкладки.

Подставив теперь числовые данные, получим

$$|BS|=\frac{1}{2}\sqrt{3}-\sqrt{3}=-\frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Расстояние оказалось отрицательным! Но это невозможно! Почему же так получилось?

Все дело в рисунке 134. Этот рисунок неверен! На нем (QT) пересекает треугольник ABC. Но именно это и нужно выяснить!

Теперь знаем, что такого рисунка быть не может, а значит, (QT) проходит вне треугольника ABC. (Если быть совсем точным, то надо еще объяснить, почему (QT) не проходит через вершину B.) Значит, на самом деле верен рисунок 135. Но тогда расстояние между треугольниками ABC и HQT равно $|BS|$ (?) и $|BS|=\frac{1}{2}\sqrt{3}$ (?). Тогда искомое расстояние равно $\frac{1}{2}\sqrt{7}$.

Любопытно, что в обоих случаях расстояние оказалось одним и тем же.

Ответ: расстояние между основаниями призмы равно $\frac{1}{2}\sqrt{7}$.

Ответ получен, но есть еще над чем подумать. Почему в двух разных случаях ответ оказался одинаковым? Может быть, это совпадение обусловлено числовыми данными, а может быть, дело в другом? И еще, вычислив $|BS|$ во втором случае и получив, что $|BS| = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$, мы оставили и выкладки, и рисунок. Однако если бы мы их продолжили и вычислили $|KS|$, то увидели бы, что результат получился тот же, что и на новом рисунке. Как вы это объясните?

Дополняем теорию

12.2.(1). Какой фигурой является множество точек, равноудаленных от: а) двух параллельных прямых; б) двух пересекающихся прямых; в) двух параллельных плоскостей; г) двух пересекающихся плоскостей; д) прямой и плоскости, перпендикулярных между собой?

12.3.(1). Какой фигурой является множество точек, равноудаленных от: а) граней тетраэдра; б) граней правильной пирамиды; в) граней правильной призмы?

Рисуем

12.4.(1). Две прямые параллельны. Нарисуйте фигуру, состоящую из всех точек, удаленных от каждой из них на расстояние d $(d\neq 0)$.

12.5.(1). Нарисуйте фигуру, состоящую из всех точек, удаленных на расстояние d от: а) данного отрезка; б) квадрата; в) окружности $(d\neq 0)$.

12.6.(2). Пусть $ABCD$ — квадрат, точка K лежит внутри стороны CD, $(KL)\perp(ABC)$. Нарисуйте перпендикуляры из L на прямые, проходящие через стороны квадрата; через диагонали квадрата.

12.7.(2). Пусть $ABCD$ — ромб с острым углом 60°. Нарисуйте перпендикуляры из точки P на прямые, проходящие через стороны и диагонали ромба, если: а) $(PD)\perp(ABC)$; б) $(PA)\perp(ABC)$.

12.8.(2). Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Нарисуйте точку, ближайшую к вершине A_1: а) в треугольнике BCD; б) в сечении BC_1D_1; в) в сечении CB_1D_1; г) в сечении BC_1D.

12.9.(2). Пусть $PABCD$ — правильная пирамида с равными ребрами. Нарисуйте точку, ближайшую к вершине A, в сечении пирамиды плоскостью: а) параллельной основанию; б) BDX, где точка X лежит внутри ребра PC: в) PCD; г) BDP.

Представляем

12.10.(1). Каждая точка неплоской линии удалена от прямой на расстояние d. Нарисуйте такую линию. Сколько таких линий существует? Какую фигуру они заполняют?

12.11.(1). Даны плоскость α и точка $A \notin \alpha$. Точка X движется по плоскости так, что расстояние $|XA|$ остается одним и тем же. По какой линии она движется?

12.12.(1). Даны две точки A и B. Точка X движется так, что $|XA| = d_1$, $|XB| = d_2$. По какой линии она движется ($d_1 \neq 0$, $d_2 \neq 0$)?

12.13.(2). Фигура F лежит в плоскости α, точка A не лежит в этой плоскости, точка B фигуры F является ближайшей к точке A. Следует ли отсюда, что $(AB) \perp \alpha$?

12.14.(4). Все точки некоторой линии одинаково удалены от каждой из двух данных плоскостей. Является ли эта линия прямой или ее частью? Является ли она плоской? Рассмотрите два случая: когда плоскости параллельны и когда они пересекаются.

12.15.(4). Приведите пример двух неплоских линий, расстояние между которыми постоянно.

12.16.(4). Какой фигурой является множество точек X, таких, что:

а) $|X\alpha| = d$; б) $|X\alpha| \leqslant d$; в) $|X\alpha| \geqslant d$; г) $d_1 \leqslant |X\alpha| \leqslant d_2$?

Планируем

12.17.(1). На плоскости α лежит угол, равный φ. Точка A не лежит в плоскости α. Известны расстояния от нее до вершины угла и до его сторон. Как найти расстояние от A до плоскости, в которой лежит угол? Выберите сами числовые данные и получите результат. Составьте обратные задачи.

12.18.(1). а) Расстояния от трех вершин параллелограмма до плоскости равны d_1, d_2, d_3 (в порядке обхода). Найдите расстояние до плоскости от четвертой вершины параллелограмма. б) Сможете ли вы решить задачу, если вместо параллелограмма взять равнобедренную трапецию? в) Составьте аналогичную задачу для правильного многоугольника. г) Как могла бы выглядеть аналогичная задача для круга? д) Пусть известны расстояния от трех вершин данного треугольника до плоскости. Как найти расстояние до этой плоскости от какой-либо фиксированной точки плоскости треугольника, например от точки пересечения медиан, биссектрис, высот, от центра описанной окружности? е) Пусть известны расстояния до плоскости от трех вершин равностороннего треугольника. Как найти расстояние до этой плоскости от четвертой вершины правильного тетраэдра, построенного на этом треугольнике?

12.19.(2). На плоскости лежит полоса (фигура, заключенная между двумя параллельными прямыми) шириной d. Расстояния до ее краев от точки, не лежащей в этой плоскости, равны d_1 и d_2. Как найти расстояние от этой точки до полосы? (Ширина полосы — это расстояние между ее краями.)

12.20.(2). В тетраэдре $PABC$ $\angle ABC = \angle PCB = 90°$. Какие надо сделать измерения на поверхности тетраэдра, чтобы вычислить расстояние от вершины P до плоскости основания? а до самого основания?

12.21.(1). Треугольник ABC правильный. Точка O — его центр, точка X — переменная точка перпендикуляра к его плоскости, проходящего через O. Установите зависимость между d_1 — расстоянием от X до (ABC), d_2 — расстоянием от X до вершин треугольника и d_3 — расстоянием от X до сторон треугольника. Обобщите задачу.

12.22.(1). Прямоугольный треугольник ABC расположен так, что вершины B и C лежат в плоскости α, а вершина A — в плоскости β, $(AC)\perp\beta$, $(AB)\perp\alpha$. Катеты $|AB|=1$, $|BC|=2$. Чему равно расстояние от вершин треугольника до прямой пересечения плоскостей?

12.23.(1). $|A\alpha|=d_1$, $|B\alpha|=d_2$. Найдите $|X\alpha|$, если $X\in(AB)$, $|AX|:|XB|=p:q$.

12.24.(2). Пусть $PABC$ — тетраэдр. Вычислите расстояние от P до его основания, если: а) основанием является равносторонний треугольник со стороной 1, $|PB|=|PC|=1$, $|PA|=\sqrt{2}$; б) $|AB|=|BC|=|AC|=|PB|=1$, $|PA|=|PC|=\sqrt{3}$; в) основанием является равносторонний треугольник со стороной 1, а грань PBC является равнобедренным прямоугольным треугольником и перпендикулярна основанию; г) $\angle ACB=90°$, $|AC|=|CB|=1$, все боковые ребра равны 1; д) $\angle ABC=90°$, $|PB|=1$, углы PBC и PBA тупые.

12.25.(2). Правильный треугольник ABC имеет сторону d, $|XA|=\sqrt{3}d$, $|XB|=|XC|=d$. Чему равно расстояние от точки X до треугольника?

12.26.(2). Квадрат $ABCD$ имеет сторону, равную 1. Вычислите расстояние от точки X до квадрата, если: а) $|XA|=|XB|=|XC|=1$; б) $|XA|=1$, $|XB|=\sqrt{3}$, $|XD|=\sqrt{3}$.

12.27.(4). От каждой из двух перпендикулярных плоскостей некоторая прямая удалена на расстояние $d>0$. На каком расстоянии она находится от их общей прямой?

12.28.(4). Пусть $\alpha\perp\beta$, $\alpha\cap\beta=c$, $a\subset\alpha$, $b\subset\beta$, $a\parallel b$, $|ac|=d_1$, $|bc|=d_2$ $(d_1\neq 0$, $d_2\neq 0)$. Чему равно $|ab|$?

12.29.(4). Две прямые a и b лежат в плоскости α на расстоянии d_1 между собой. Прямая c перпендикулярна этой плоскости. $|ac|=d_2$. Найдите $|bc|$ $(d_1\neq 0,\ d_2\neq 0)$.

12.30.(4). Пусть $a\parallel b$, $b\parallel c$, $|ac|$, $|ab|$, $|bc|$ известны. Как найти расстояние от одной из данных прямых до плоскости, в которой лежат другие две? Вычислите расстояние от c до плоскости, в которой лежат a и b, если $|ac|=3$, $|bc|=4$, а $|ab|$ принимает такие значения: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

12.31.(4). Расстояние между двумя параллельными плоскостями равно 1. В них лежат два круга радиусом 1. Вычислите расстояние между кругами, если расстояние между их центрами равно: а) 2; б) 3.

12.32.(4). Пусть $ABCA_1B_1C_1$ — треугольная призма. Ее основанием является равносторонний треугольник со стороной 2, $\angle A_1AC=\angle A_1AB=60°$. Нарисуйте высоту призмы, если $|AA_1|$ равняется: а) 1; б) 2; в) 3. Вычислите ее в каждом случае. (Высота призмы — это расстояние между плоскостями ее оснований или общий перпендикуляр этих плоскостей.)

12.33.(4). В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все грани — равные ромбы. Острый угол ромба равен φ, сторона равна d. Чему равна высота параллелепипеда?

12.34.(4). В правильном тетраэдре с ребром 2 проводится сечение плоскостью, параллельной одной из граней. Выразите площадь этого сечения как $f(x)$, где x — расстояние между гранью и плоскостью сечения.

Ищем границы

12.35.(1). Треугольник ABC равносторонний со стороной, равной 2. $|A\alpha|=2$, $|B\alpha|=3$. В каких границах находится $|C\alpha|$?

12.36.(4). В основании четырехугольной пирамиды $PABCD$ лежит квадрат со стороной 2. Грань PAB перпендикулярна основанию. $|PA|=|PB|=2$. В этой пирамиде проводится сечение, параллельное плоскости PCD. Выразите его площадь как $f(x)$, где x — расстояние между сечением и параллельной ему гранью. Можете ли вы установить, в каких границах лежит его площадь? Решите такую же задачу, если плоскость сечения параллельна другим граням пирамиды.

Доказываем

12.37.(2). Имеются два равных круга, расположенные так, что они имеют единственную общую точку. Из некоторой точки пространства на плоскости этих кругов проведены два перпендикуляра. Перпендикуляры проходят через центры данных кругов. Докажите, что единственная общая точка этих кругов лежит в одной плоскости с этими перпендикулярами. Изменится ли результат, если хотя бы один из них не будет проходить через центр круга? Сформулируйте и проверьте обратные утверждения.

12.38.(2). Пусть F_1 и F_2 — две фигуры в плоскости α, причем $F_2 \subset F_1$. Докажите, что для любой точки X $|XF_2| \geqslant |XF_1|$.

12.39.(3). Пусть $a \subset \alpha$, $b \perp \alpha$, $b \cap \alpha = \{A\}$. Докажите, что $|ba|=|Aa|$.

12.40.(4). а) Пусть $\alpha \parallel \beta$, $A \in \alpha$, фигура F лежит в плоскости β, A_1 — проекция точки A на β. Докажите, что $|AF|^2=|\alpha\beta|^2+|A_1F|^2$. б) Пусть фигуры F и G лежат в параллельных плоскостях α и β, F_1 — проекция фигуры F на плоскость β. Докажите, что $|FG|^2=|\alpha\beta|^2+|F_1G|^2$. Рассмотрите случай, когда F и G — скрещивающиеся прямые.

12.41.(4). Через точки A и B плоскости α проведены две прямые a и b, перпендикулярные этой плоскости. Докажите, что $|ab|=|AB|$.

12.42.(4). Два правильных тетраэдра стоят на плоскости. Докажите, что расстояние между ними меньше расстояния между их вершинами, не лежащими в данной плоскости. Обобщите задачу.

Исследуем

12.43.(1). На плоскости α лежит треугольник ABC. $X \notin \alpha$. Может ли расстояние $|X\alpha|$ равняться: а) $|XA|$; б) $|XA|$ и $|XB|$; в) расстоянию от X до (AB); г) расстоянию от X до (AB) и (AC)?

12.44.(2). $(AP)\perp(ABC)$, $(PK)\perp(BC)$, $K\in(BC)$. Проверьте равносильность таких утверждений: а) точка K лежит внутри отрезка BC и $\angle BAC\geqslant 90°$; б) точка K совпадает с B (или C) и $\angle B=90°$ (или $\angle C=90°$); в) точка K не лежит на отрезке BC и $\angle B>90°$ (или $\angle C>90°$).

12.45.(2). Пусть a и b — две прямые. Точка X — переменная точка прямой a. Как меняется $|Xb|$ при движении точки X в одном направлении по прямой a?

12.46.(2). Точка K удалена от всех вершин треугольника на 1, точка L удалена от всех его сторон на 1. Какая из этих точек ближе к плоскости треугольника?

12.47.(4). Правильную четырехугольную пирамиду положили боковой гранью на данную плоскость. Расстояние от ребра основания, не лежащего в этой плоскости, до плоскости оказалось равно высоте пирамиды. Какое ее ребро является наибольшим?

Прикладная геометрия

12.48.(1). На некоторой высоте над землей произошел взрыв. Его видели и слышали три человека, которые и установили, на какой высоте он произошел. Как они это сделали? Смогли бы с этой задачей справиться два человека?

12.49.(4). Любые ли две треноги можно поставить на землю так, что перекладина, установленная на них, будет горизонтальна?

12.50.(4). Самолет летит на одной и той же высоте. Вы располагаете двумя приборами для измерения расстояния до него. Можете ли вы с их помощью определить высоту, на которой он летит?

§ 13. Пространственная теорема Пифагора

13.1. Три формулировки теоремы Пифагора

Теореме Пифагора можно дать по крайней мере три формулировки:

1) *в прямоугольном треугольнике квадрат длины гипотенузы равен сумме квадратов длин катетов;*

2) *квадрат длины диагонали прямоугольника равен сумме квадратов длин двух его взаимно перпендикулярных сторон;*

3) *квадрат длины любого отрезка равен сумме квадратов длин его проекций на любые две взаимно перпендикулярные прямые.* (Подразумевается, что отрезок и прямые лежат в одной плоскости.)

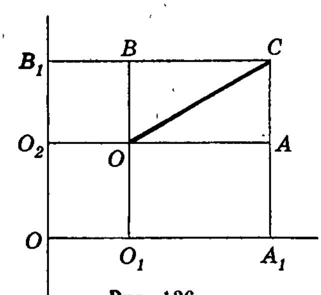


Рис. 136

Вторая формулировка известна и, очевидно, равносильна первой, а вспомнив определение проекции, можно убедиться, что третья формулировка равносильна второй (рис. 136):

$$OC^2=OA^2+OB^2,\ OA=O_1A_1,\ OB=O_2B_1.$$

13.2. Пространственная теорема Пифагора для проекций

Цель этого параграфа — обобщить теорему Пифагора на пространство. Каждая из трех формулировок теоремы Пифагора допускает соответствующее обобщение. Воспользуемся здесь последней формулировкой: в ней при обобщении изменения минимальны — надо говорить не о двух, а о трех взаимно перпендикулярных прямых.

Теорема 13.1 (*пространственная теорема Пифагора*).

Квадрат длины любого отрезка равен сумме квадратов длин его проекций на любые три взаимно перпендикулярные прямые.

Доказательство. Пусть в пространстве заданы отрезок AB и три взаимно перпендикулярные прямые a, b, c (рис. 137). Обозначим через γ плоскость, в которой лежат прямые a и b. Проведем через точки A и B прямые p и q, перпендикулярные плоскости γ; отрезок $A'B'$ — проекция отрезка AB на плоскость γ (случай, когда $p=q$, рассмотрите самостоятельно). Так как $p\perp\gamma$ и $q\perp\gamma$, то $p\parallel q$, а потому прямые p и q лежат в некоторой плоскости δ. Спроектируем теперь в плоскости δ отрезок AB на прямую p. Получим отрезок AC (случай, когда $A=C$, рассмотрите самостоятельно). Так как $p\perp\gamma$ и прямая $A'B'$ лежит в γ, то $p\perp(A'B')$. Следовательно, отрезки $A'B'$ и AC — это проекции отрезка AB на две взаимно перпендикулярные прямые в плоскости δ. Тогда по теореме Пифагора (вспомните ее третью формулировку)

$$AB^2=A'B'^2+AC^2. \tag{13.1}$$

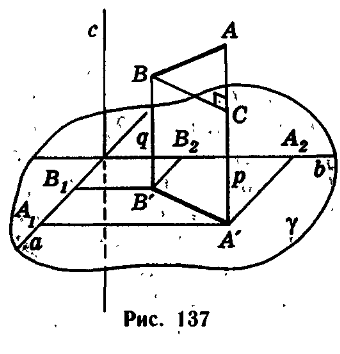


Рис. 137

Спроектируем теперь отрезок $A'B'$ на прямую a в отрезок A_1B_1 и на прямую b в отрезок A_2B_2. Снова по теореме Пифагора получим:

$$A'B'^2=A_1B_1^2+A_2B_2^2. \tag{13.2}$$

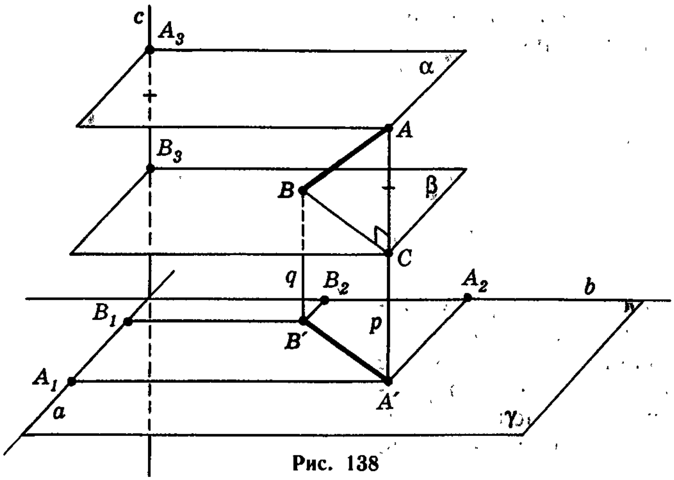


Рис. 138

По теореме о проекциях (следствие 1 теоремы 12.1) отрезки A_1B_1 и A_2B_2 — это проекции отрезка AB на прямые a и b соответственно. Спроектируем теперь отрезок AB в отрезок A_3B_3 на прямую c, проведя через точки A и B плоскости α и β, перпендикулярные прямой c (рис. 138). Так как точка C — проекция точки B на прямую p, то C — точка пересечения плоскости β и прямой p. Отрезки A_3B_3 и AC параллельны (так как $c \perp \gamma$ и $p \perp \gamma$), и концы их лежат на параллельных плоскостях α и β. Поэтому по лемме 12.2 отрезки A_3B_3 и AC равны, т. е. $A_3B_3 = AC$.

Заменяя в (13.1) длины $A'B'$ и AC длинами проекций A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, получаем требуемое равенство:

$$AB^2 = A_1B_1^2 + A_2B_2^2 + A_3B_3^2. \blacksquare$$

13.3. О значении теоремы Пифагора

▲ Теорема Пифагора — это главная и самая замечательная теорема геометрии, прежде всего обычная «плоская» теорема Пифагора, так как пространственное обобщение получается на ее основе (как видно из вывода п. 13.2). Теорема Пифагора замечательна уже тем, что она вовсе не очевидна. Если оглянуться на доказанные нами теоремы, то можно заметить, что почти каждая из них становится довольно очевидной, если только хорошо понять ее содержание, хотя точное доказательство может быть не очень простым. Так, например, то, что перпендикуляр короче наклонной, видно просто на чертеже. Но сколько ни смотри на прямоугольный треугольник, нельзя увидеть, почему между его сторонами всегда есть такое простое соотношение, хотя известны его очень ясные доказательства. Одно из них вы видите на рисунке 139.

Значение теоремы Пифагора состоит прежде всего в том, что из нее или с ее помощью можно выводить все теоремы, касающиеся длин отрезков и величин углов на плоскости и в пространстве (не считая самых первичных теорем об углах). Мы уже воспользовались теоремой Пифагора в наших основных выводах — в теореме о ближайшей точке, в доказательстве пространственной теоремы Пифагора — и еще будем ею пользоваться. Кроме того, мы ссылались на то свойство перпендикуляра к прямой, что он короче наклонной; это, очевидно, может быть выведено из теоремы Пифагора. Из теоремы Пифагора выводится теорема косинусов, вернее, обобщенная теорема Пифагора, а из нее можно вывести теорему синусов, признаки равенства треугольников и т. д.

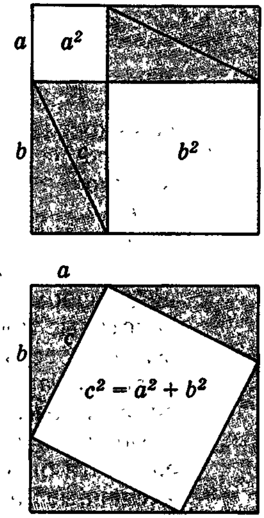


Рис. 139

Можно сказать, что теорема Пифагора выражает основной закон связи между расстояниями на плоскости, а в пространственном обобщении — и в пространстве. Если на плоскости введены прямоугольные координаты x, y (рис. 140), то расстояние между точками $A_1(x_1, y_1)$ и $A_2(x_2, y_2)$ выражается по теореме Пифагора формулой

$$|A_1A_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \qquad (13.3)$$

Этим, как можно доказать, определяется геометрия на плоскости: обычная, евклидова планиметрия — это геометрия, в которой положение точки задается двумя координатами x, y и расстояние выражается формулой (13.3). Иначе говоря, это геометрия, в которой выполняется формула Пифагора. (Возможна и неевклидова геометрия, в ней расстояния выражаются иначе.) Такая геометрия названа евклидовой, потому что именно Евклид (в начале III в. до н. э.) дал лучшее ее систематическое изложение, в которое входила и теорема Пифагора. Разумеется, Евклид не знал системы координат, и такой подход к евклидовой геометрии сформировался только в прошлом веке.

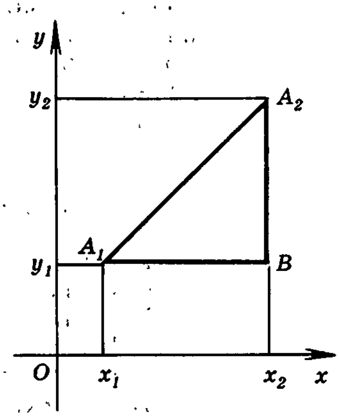


Рис. 140

Важнейшие обобщения геометрии связаны с обобщением теоремы Пифагора. В основе математического аппарата главных теорий современной физики — теории относительности и квантовой механики — лежат, можно сказать, обобщения теоремы Пифагора. ▼

Задачи

Разбираемся в решении

13.1. Плоскости α и β перпендикулярны. AA_1 — перпендикуляр на плоскость α из точки A, BB_1 — перпендикуляр на плоскость β из точки B. Можно ли установить связь между величинами $|AA_1|$, $|BB_1|$, $|AB|$, $|A_1B_1|$?

Решение.

Установить связь между величинами — значит в конечном итоге найти формулу, в которой были бы все эти величины да еще, возможно, некоторые постоянные. Если найдена формула, в которой, кроме этих величин, есть и другие, то останавливаться нельзя. Лишние величины надо постараться убрать из формулы. Если это не получается, то приходим к мысли о том, что связь между данными величинами однозначно установить невозможно. В самом деле, если в формуле присутствует еще хотя бы одна лишняя величина, то ей можно придавать различные численные значения и получать отсюда разные формулы, связывающие данные величины. Но на один вопрос еще надо постараться ответить: «Это только нам не удалось убрать из формулы лишнюю величину, или это в принципе невозможно?» Для того чтобы ответить на такой вопрос, требуется дополнительное исследование.

Перед тем как перейти к непосредственному решению задачи, заметим следующее. Вопрос о связи величин между собой можно несколько видоизменить. Можно искать не формулу, связывающую данные величины между собой, а любую из них, считая, что все остальные известны.

Обратите внимание на то, как поставлен вопрос к задаче. Его форма не категорическая, а предположительная: «Можно ли...?» (Бывает и так: «Можете ли вы...?» Тут есть оттенки. Какие?) Когда в математической задаче спрашивается: «А можно ли сделать то-то и то-то?» — лучше начинать решение с самых простых случаев. Если в этих, более простых случаях ничего не выходит, то, видимо, и в более общей ситуации не получится. А если в простых случаях результат получается, то можно переходить и к более общим случаям. (Заметим, что в иных задачах с категорической формулировкой целесообразно действовать так же.)

В данной задаче ничего не говорится о том, где лежат точки A и B. Возьмем $A \in \beta$ и $B \in \alpha$. Обозначим $|AA_1| = d_1$, $|BB_1| = d_2$. Будем считать, что $d_1 \neq 0$, $d_2 \neq 0$.

Если среди этих расстояний есть нули, то ответ очевиден и задачи как таковой нет (?). (Упрощая условие, надо все же сохранить содержание задачи.)

Если посмотреть на рисунок 141, то ответ очевиден. Расстояние $|A_1B_1|$ можно найти из пространственной теоремы Пифагора (?), значит, связь между величинами в этом случае есть.

Возьмем случай сложнее: точку A оставим в плоскости β, а точку B уберем из плоскости α (рис. 142).

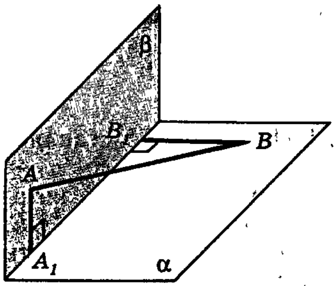


Рис. 141

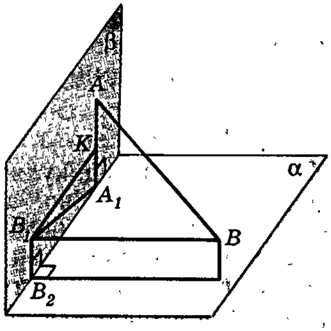


Рис. 142

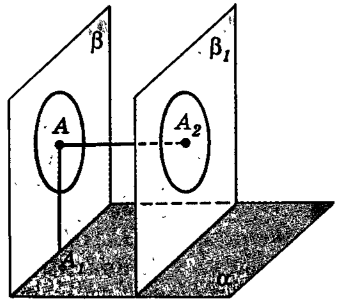


Рис. 143

Пусть на этом рисунке $|B_1B_2|=x$, $|A_1B_2|=y$. Тогда

$$\begin{cases} |A_1B_1|^2=x^2+y^2, \\ d^2=|AB|^2=(d_1-x)^2+y^2+d_2^2. \end{cases} \qquad (?)$$

Получилась система двух уравнений с тремя неизвестными. Как правило, однозначно найти решение такой системы невозможно. В этом можно убедиться, к примеру, таким способом. Из полученной системы вытекает равенство

$$d^2=d_1^2+d_2^2-2d_1x+|A_1B_1|^2. \qquad (?)$$

Замечаем, что $|A_1B_1|^2$ зависит от x линейно, следовательно, выразить $|A_1B_1|^2$ через данные величины невозможно.

Теперь ясно, что и в более общем случае, когда $A\notin\beta$, установить связь между этими величинами не удастся (?).

Попытаемся разобраться в заданной ситуации подробнее: а почему такой связи нет? Какова геометрическая природа этого явления? (К отысканию геометрической сути задачи нас побуждает и чисто алгебраическое ее решение. Мы пришли к ответу, составив некую систему и проанализировав ее решение. А нельзя ли к тому же ответу прийти чисто геометрическим методом, т. е. рассматривая фигуры в пространстве?) Вернемся к рисунку 141. Зафиксируем точку A в плоскости β и поставим такой вопрос: «А где может находиться, исходя из условия задачи, точка B?» Так как $|B\beta|=d_2\neq 0$, то B находится на плоскости, параллельной плоскости β, удаленной от β на расстояние d_2. Таких плоскостей две. Возьмем одну из них β_1 (рис. 143). Так как точка B находится на фиксированном расстоянии от A, то она будет находиться на фиксированном расстоянии от точки A_2 — проекции точки A на плоскость β_1. Но это означает, что она находится на некоторой окружности в плоскости β_1 с центром в точке A_2. Но тогда точка B_1 — проекция точки B на плоскость β — будет находиться на окружности с центром в точке A (?). Теперь видно, что $|A_1B_1|$ не определяется однозначно. (И хорошо видно, в каких границах находится $|A_1B_1|$ (?).)

Теперь, когда задача решена, стоит задуматься: а почему же нам удалось найти $|A_1B_1|$ в ситуации, изображенной на рисунке 141? И еще: найти $|A_1B_1|$, т. е. установить связь между данными величинами, оказалось невозможно. Можно ли ввести в рассмотрение другие величины, такие, что для нового набора величин (данных и вновь введенных) можно установить связь между ними?

Дополняем теорию

13.2. Прямые OA, OB, OC взаимно перпендикулярны. Прямая OX составляет с ними углы φ_1, φ_2, φ_3 соответственно. а) Докажите, что $\cos^2\varphi_1+\cos^2\varphi_2+\cos^2\varphi_3=1$. б) Установите зависимость между углами, которые (OX) образует со своими проекциями на плоскости AOB, BOC, AOC.

(Зависимость между углами может быть записана как зависимость между тригонометрическими функциями этих углов.)

Находим величину

13.3. Пусть ABC и ACD — два прямоугольных треугольника с катетами 3 и 4. Они имеют общую гипотенузу AC и лежат в перпендикулярных плоскостях. Вычислите $|BD|$.

13.4. Правильный шестиугольник $ABCDEF$ со стороной 1 согнули по диагонали AD так, что его части оказались в перпендикулярных плоскостях. Вычислите новое расстояние между B и F; между отрезком AB и E.

13.5. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребро равно 2. Точка K — середина ребра CD, точка L — середина ребра C_1B_1, точка A — середина отрезка MB, точка N — середина отрезка AK. Точка P лежит на отрезке A_1D, а точка Q лежит на отрезке CD_1. Вычислите: а) $|A_1K|$; б) $|KL|$; в) $|LM|$; г) $|LN|$; д) $|PQ|$, если $|DP|=\frac{1}{3}|DA_1|$, $|D_1Q|=\frac{1}{3}|D_1C|$.

Ищем границы

13.6. Концы отрезка AB длиной 2 лежат в перпендикулярных плоскостях α и β ($A\in\alpha$, $B\in\beta$). $|A\beta|=|B\alpha|=1$. Точка K движется от A к B по отрезку AB. Выразите расстояние от K до прямой пересечения этих плоскостей как $f(x)$, где $x=|AK|$. В каких границах лежат значения этой функции?

13.7. Два полукруга имеют общий диаметр AB и лежат в перпендикулярных плоскостях. Из точки A по окружности одного из них и из точки B по окружности другого одновременно и с одной и той же скоростью движутся точки K и L. В каких границах изменяется $|KL|$?

13.8. Два равносторонних треугольника ABC и ABD лежат в перпендикулярных плоскостях. Их стороны равны 1. а) Из точек C и D по отрезкам CB и AD одновременно и с одной и той же скоростью движутся точки K и L. В каких границах лежит расстояние между ними? б) Ответьте на тот же вопрос, если точка L движется от A к D (при прочих тех же условиях). в) Является ли найденное вами наименьшее значение для $|KL|$ расстоянием между прямыми (BC) и (AD)? между отрезками BC и AD? (Ответьте для каждого из случаев: а) и б).)

13.9. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки K и L движутся по отрезкам A_1B и AC так, что всегда $|A_1K|=|AL|$. В каких границах лежит $|KL|$, если ребро куба равно 1?

Исследуем

13.10. Через одну точку проведены три взаимно перпендикулярные прямые. Через каждые две из них проведена плоскость. Возьмите еще одну точку. Рассмотрим такие величины: расстояние от нее до первой точки, расстояния от нее до данных плоскостей и расстояния от нее до данных прямых. Сколько и какие надо знать из этих величин, чтобы найти остальные? Подтвердите полученный результат конкретным расчетом.

13.11. Плоскости α и β пересекаются, $A \in \alpha$, $B \in \beta$, AA_1 — перпендикуляр на плоскость β, BB_1 — перпендикуляр на плоскость α. Можете ли вы установить связь между величинами $|AB|$, $|AA_1|$, $|BB_1|$, $|A_1B_1|$?

Переключаемся

13.12. У вас имеются два одинаковых спичечных коробка. Как вы их приложите друг к другу для того, чтобы получить прямоугольный параллелепипед с наибольшей диагональю?

13.13. Можете ли вы узнать длину диагонали спичечного коробка, ничего в нем не измеряя?

§ 14. Углы

В этом параграфе рассматриваются углы между прямыми и плоскостями в пространстве. Их постоянно приходится измерять в практике. Угол наклона плоскости орбиты спутника к плоскости экватора, угол падения луча света на отражающую поверхность, угол наклона орудийного ствола при выстреле, угол наклона ската крыши, долгота и широта места на Земле и другие подобные примеры говорят о важности этих понятий.

14.1. Угол между лучами

Начнем с частного случая расположения двух лучей. Как и в планиметрии, два луча называются **сонаправленными** или **одинаково направленными**, если либо один из них содержит другой, либо они лежат на параллельных прямых по одну сторону от прямой, проходящей через их начала (рис. 144). Сонаправленные лучи p и q обозначаются так: $p \uparrow\uparrow q$.

Угол между сонаправленными лучами полагается равным 0°.

Если лучи p и q не сонаправлены и имеют общее начало, то угол между ними определяется как вели-

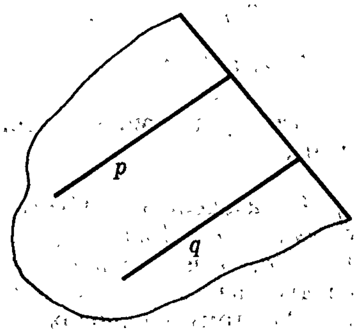


Рис. 144

чина (мера) плоского выпуклого (т. е. не большего $180°$) угла со сторонами p и q (рис. 145).

Наконец, в общем случае, когда лучи p и q не сонаправлены и имеют различные начала (рис. 146), поступают так: из любой точки O проводят лучи p' и q', сонаправленные соответственно с лучами p и q. Углом между p и q называется угол между p' и q'.

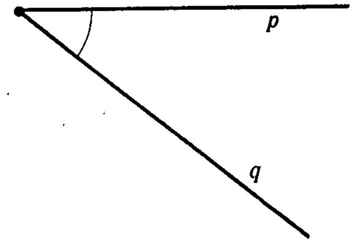


Рис. 145

Угол между лучами p и q обозначается так: $\angle pq$. Такой угол не зависит от выбора точки O. Это вытекает из двух следующих лемм.

Лемма 14.1.

Углы, стороны которых соответственно сонаправлены, равны.

Доказательство. Пусть даны два угла с вершинами в точках O и O' и с соответственно сонаправленными сторонами: $p\uparrow\uparrow p'$ и $q\uparrow\uparrow q'$ (рис. 147). Если данные углы лежат в одной плоскости, то утверждение леммы известно из планиметрии. Поэтому можно считать, что они не лежат в одной плоскости.

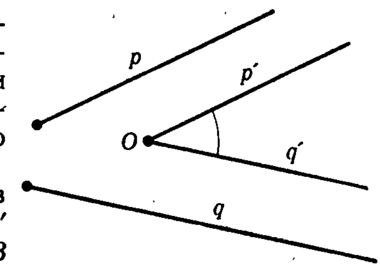


Рис. 146

Отложим на сонаправленных сторонах этих углов равные отрезки: $OA=O'A'$ на p и p' и $OB=O'B'$ на q и q'. Проведем отрезки OO', AA', BB', AB и $A'B'$. Так как $OA=O'A'$, $OA\parallel O'A'$, то четырехугольник $OAA'O'$ — параллелограмм. Поэтому $OO'=AA'$ и $OO'\parallel AA'$. Аналогично $OO'=BB'$ и $OO'\parallel BB'$. Поэтому $AA'=BB'$ и $AA'\parallel BB'$, т. е. четырехугольник $ABB'A'$ — параллелограмм. Следовательно, $AB=A'B'$.

Итак, в треугольниках OAB и $O'A'B'$ соответственные стороны равны. Но тогда в них равны и соответственные углы. Итак, $\angle AOB=\angle A'O'B'$, т. е. $\angle p'q'=\angle pq$. ■

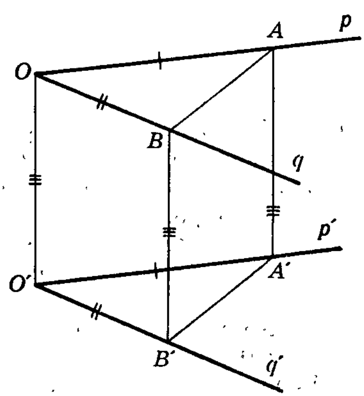


Рис. 147

Лемма 14.2.

Два луча, сонаправленные с третьим, сонаправлены.

Доказательство. Пусть лучи a и b сонаправлены с лучом c. Докажем, что a и b сонаправлены. Если a, b и c лежат в одной плоскости, то это следует из соответствующего результата планиметрии. Поэтому предположим, что они не лежат в одной плоскости.

Тогда из леммы о том, что две прямые, параллельные третьей, параллельны, следует, что лучи a, b, c лежат на параллельных прямых a', b', c'. Начала лучей a, b, c — точки A, B, C — не лежат на одной прямой, так как иначе бы лучи a, b, c лежали бы в одной плоскости вопреки предположению. Следовательно, через точки A, B, C проходит определенная плоскость α (рис. 148). Лучи a, b, c не лежат в одной плоскости, а значит, не лежат в α.

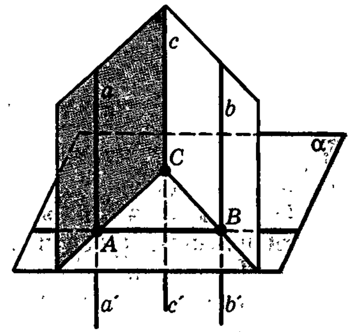


Рис. 148

Лучи a и c параллельны и, значит, лежат в некоторой плоскости. Она пересекает плоскость α по прямой AC. Так как a и c сонаправлены, то они лежат по одну сторону от этой прямой. Тем самым они лежат по одну сторону от плоскости α.

Точно так же получим, что лучи b и c лежат по одну сторону от α. Значит, лучи a и b лежат по одну сторону от плоскости α, там, где лежит луч c.

Так как лучи a и b параллельны, то они лежат в одной плоскости. Эта плоскость пересекает плоскость α по прямой AB. И так как лучи a и b лежат по одну сторону от плоскости α, то они лежат по одну сторону от прямой AB, в одной полуплоскости. Значит, a и b сонаправлены. ■

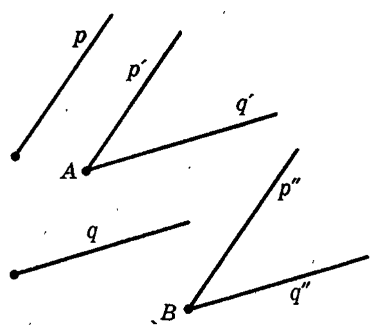


Рис. 149

После того как доказаны эти леммы, становится ясно что если даны два луча p, q и из разных точек A и B проведены сонаправленные с ними лучи p', q' и p'', q'' (рис. 149), то, во-первых, по лемме 14.2 $p''\uparrow\uparrow p'$ и $q''\uparrow\uparrow q'$ и, во-вторых, по лемме 14.1 $\angle p''q'' = \angle p'q'$, как и говорилось при определении угла между лучами p и q. Итак, находя угол между лучами, можно откладывать сонаправленные с ними лучи от любой точки.

14.2. Угол между прямыми

Теперь мы можем определить угол между двумя прямыми в пространстве.

Углом между прямыми называется меньший из двух углов между лучами, параллельными этим прямым (рис. 150).

Из данного определения следует, что угол между параллельными прямыми равен нулю.

В том случае, *когда прямые пересекаются, угол между ними равен величине вертикальных не тупых углов, образованных этими прямыми.*

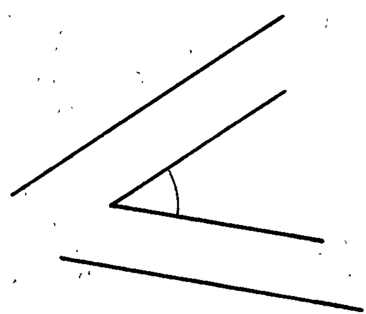


Рис. 150

Если же прямые скрещиваются, то, чтобы найти угол между ними, можно поступить так: через любую точку провести прямые, параллельные данным, и найти угол между этими прямыми (рис. 151).

В частности, теперь можем говорить о *взаимно перпендикулярных скрещивающихся прямых* (а также лучах), если угол между ними равен 90°. Взаимно перпендикулярными называем и отрезки, лежащие на взаимно перпендикулярных прямых.

При таком расширении понятия перпендикулярности прямых, лучей и отрезков остаются справедливыми доказанные ранее теоремы, в которых перпендикулярность рассматривалась лишь для пересекающихся прямых, лучей и отрезков: признак перпендикулярности прямой и плоскости (теорема 7.1) и теорема о трех перпендикулярах (следствие 2 теоремы 12.1). Убедитесь в этом! В дальнейшем мы будем применять эти теоремы именно в этом более широком смысле. Так, например, для того чтобы установить перпендикулярность прямой a и плоскости α, теперь можно найти на этой плоскости любые две пересекающиеся прямые, перпендикулярные a. Эти прямые могут a не пересекать.

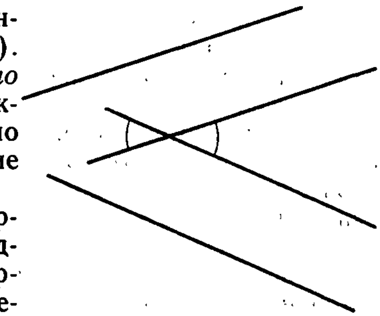


Рис. 151

14.3. Угол между прямой и плоскостью

В главе II мы подробно изучили два важнейших случая расположения прямой и плоскости: перпендикулярность прямой и плоскости и их параллельность.

Если прямая перпендикулярна плоскости, то она перпендикулярна **любой** прямой, лежащей в этой плоскости. Поэтому естественно считать, что **угол между взаимно перпендикулярными прямой и плоскостью равен 90°**.

Если же **прямая параллельна плоскости (или лежит в ней), то угол между ними считается равным 0°**.

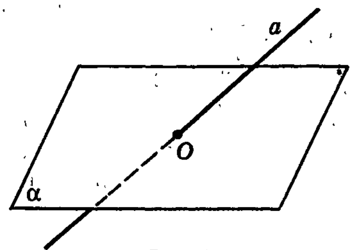


Рис. 152

Рассмотрим общий случай: прямая a пересекает плоскость α, но не перпендикулярна ей (рис. 152), т. е. случай прямой, наклонной к плоскости.

В этом случае, характеризуя их взаимное расположение, часто указывают, насколько прямая отклонилась от перпендикуляра к плоскости. Например, в оптике говорят про угол падения луча света на плоскую поверхность, т. е. про угол между прямой и перпендикуляром (нормалью) к данной плоскости (рис. 153). Но в геометрии, оценивая наклон прямой к плоскости, чаще рассматривают не этот угол, а угол, дополняющий его до 90°. А именно дается следующее определение:

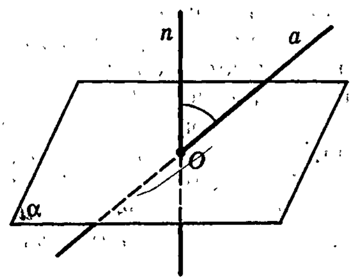


Рис. 153

Углом между плоскостью и не перпендикулярной ей прямой называется угол между этой прямой и ее проекцией на данную плоскость (рис. 154).

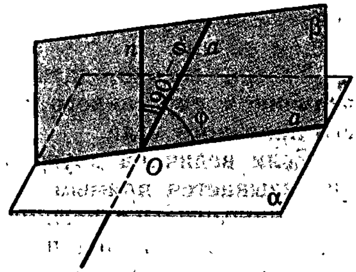


Рис. 154

Ясно, почему это определение исключает случай, когда прямая перпендикулярна плоскости: в этом случае проекцией на плоскость является точка. Если же прямая параллельна плоскости, то ее проекцией будет прямая, параллельная данной прямой, т. е., как говорилось, угол между прямой и плоскостью в этом случае равен 0°.

Угол между прямой и плоскостью обладает следующим свойством: он является *наименьшим среди всех углов, которые данная прямая образует с прямыми, лежащими в данной плоскости,* поэтому его и считают углом между прямой и плоскостью. Докажите это свойство самостоятельно. Идея доказательства указана на рисунке 155 ($\angle ACO = \angle BCO = 90°$).

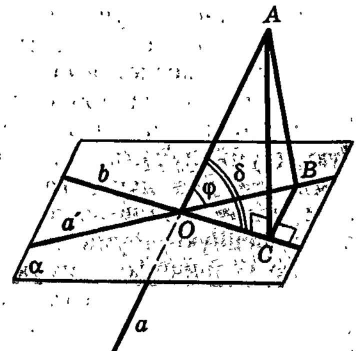


Рис. 155

14.4. Двугранный угол

Представление о двугранных углах дают двускатные крыши домов, приоткрытые двери и т. п., т. е. фигуры, образованные двумя полуплоскостями, имеющими общую границу. Соответственно этому и дается определение.

Фигура, образованная в пространстве двумя полуплоскостями, имеющими общую граничную прямую и не лежащими в одной плоскости, называется **двугранным углом** (рис. 156). Сами полуплоскости называются **гранями двугранного угла,** а их общая граничная прямая — его **ребром**.

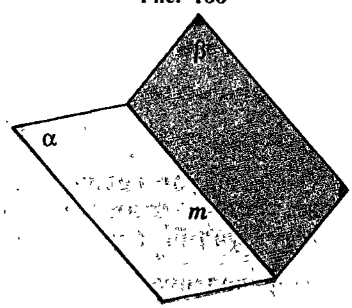


Рис. 156

Измеряют двугранные углы следующим образом. На ребре m двугранного угла ω с гранями α и β отмечают точку O. Из точки O в его гранях проводят лучи a и b, перпендикулярные ребру m: a в грани α и b в грани β (рис. 157).

Угол со сторонами a, b называется **линейным углом** двугранного угла ω. Двугранный угол измеряется его линейным углом.

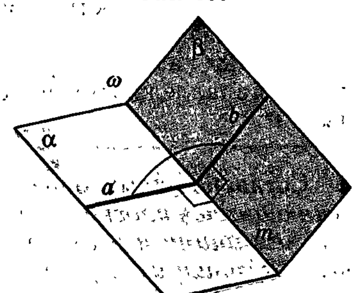


Рис. 157

Величина линейного угла не зависит от выбора его вершины на ребре двугранного угла.

Действительно, возьмем другую точку $O' \in m$ и проведем в гранях α и β из точки O' лучи $a' \perp m$ и $b' \perp m$ (рис. 158). Поскольку a и a' лежат в одной полуплоскости α и перпендикулярны ребру m, то a и a' сонаправлены. Аналогично получаем, что $b \uparrow\uparrow b'$. Но тогда $\angle a'b' = \angle ab$, что и утверждалось в предыдущем абзаце.

Теперь можно дать такое о п р е д е л е н и е: **величиной двугранного угла называется величина его линейного угла.**

Если величина двугранного угла равна 90°, то он называется **прямым.** *Плоскости граней прямого двугранного угла перпендикулярны друг другу.* Легко видеть, что если при пересечении двух плоскостей один из четырех образованных ими двугранных углов прямой, то и остальные три прямые.

Если две полуплоскости образуют двугранный угол, то его величина называется также **углом между этими полуплоскостями.**

Замечание. Подобно тому как в планиметрии углом можно назвать часть плоскости, ограниченную двумя лучами, имеющими общее начало, или сами эти два луча, так в стереометрии двугранным углом можно назвать и часть пространства, ограниченную двумя полуплоскостями, имеющими общую граничную прямую, или сами эти две полуплоскости. Мы в качестве определения двугранного угла выбрали второй вариант как более удобный для рассматриваемых нами вопросов.

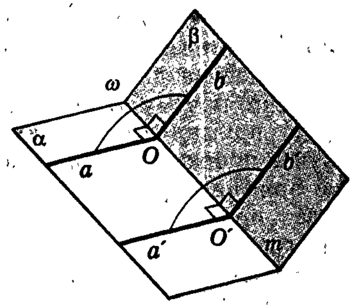


Рис. 158

14.5. Угол между плоскостями

Переход от величин двугранных углов к углам между плоскостями аналогичен переходу от углов между лучами к углам между прямыми.

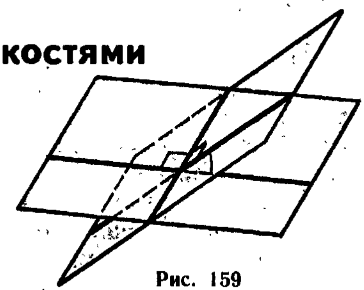


Рис. 159

Определение.

Если две плоскости пересекаются, то **углом** между ними называется величина наименьшего из образованных ими двугранных углов. Угол между двумя параллельными плоскостями полагается равным 0°.

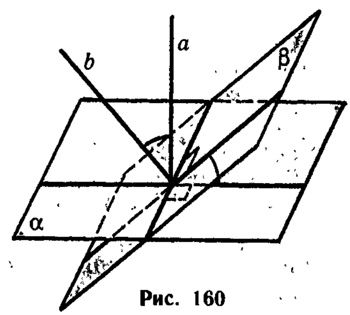


Рис. 160

Согласно этому определению *угол между пересекающимися плоскостями равен углу между прямыми, лежащими в этих плоскостях и перпендикулярными к линии их пересечения* (рис. 159). Докажите, что *угол между плоскостями равен углу между перпендикулярными им прямыми* (рис. 160).

Дополнение к параграфу 14

Трехгранные углы

Оставляя определение и изучение произвольных многогранных углов до § 31, мы рассмотрим сейчас простейшие из них — трехгранные углы. Если в стереометрии аналогами плоских углов можно считать двугранные углы, то трехгранные углы можно рассматривать как аналоги плоских треугольников, а в следующих параграфах увидим, как они естественно связаны со сферическими треугольниками.

Построить (а значит, и конструктивно определить) трехгранный угол можно так. Возьмем любые три луча a, b, c, имеющие общее начало O и не лежащие в одной плоскости (рис. 161). Эти лучи являются сторонами трех выпуклых плоских углов: угла α со сторонами b, c, угла β со сторонами a, c и угла γ со сторонами a, b. Объединение этих трех углов α, β, γ и называется **трехгранным углом** $Oabc$ (или, короче, трехгранным углом O). Лучи a, b, c называются **ребрами трехгранного угла** $Oabc$, а плоские углы α, β, γ — его **гранями**. Точка O называется **вершиной** трехгранного угла.

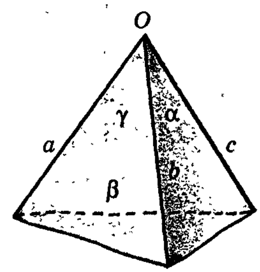


Рис. 161

Замечание. Можно было бы определить трехгранный угол и с невыпуклой гранью (рис. 162), но мы такие трехгранные углы рассматривать не будем.

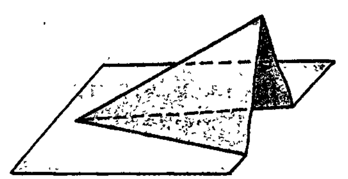


Рис. 162

При каждом из ребер трехгранного угла определяется соответствующий двугранный угол, такой, ребро которого содержит соответствующее ребро трехгранного угла, а грани которого содержат прилежащие к этому ребру грани трехгранного угла.

Величины двугранных углов трехгранного угла $Oabc$ при ребрах a, b, c будем соответственно обозначать через $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$.

Три грани α, β, γ трехгранного угла $Oabc$ и три его двугранных угла при ребрах a, b, c, а также величины α, β, γ и $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$ будем называть элементами трехгранного угла. (Вспомните, что элементы плоского треугольника — это его стороны и его углы.)

Наша задача — выразить одни элементы трехгранного угла через другие его элементы, т. е. построить «тригонометрию» трехгранных углов.

1) Начнем с вывода аналога теоремы косинусов. Сначала рассмотрим такой трехгранный угол $Oabc$, у которого хотя бы две грани, например α и β, являются острыми углами. Возьмем на его ребре c точку C

и проведем из нее в гранях α и β перпендикуляры CB и CA к ребру c до пересечения с ребрами a и b в точках A и B (рис. 163). Выразим расстояние AB из треугольников OAB и CAB по теореме косинусов.

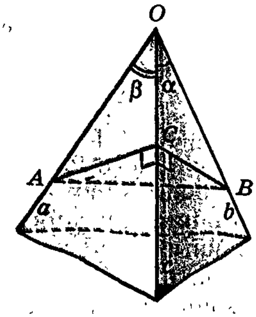


Рис. 163

Получим:

$$AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cos\hat{c},$$
$$AB^2=OA^2+OB^2-2AO\cdot BO\cos\gamma.$$

Вычитая из второго равенства первое, получим:

$$OA^2-AC^2+OB^2-BC^2+$$
$$+2AC\cdot BC\cos\hat{c}-2AO\cdot BO\cos\gamma=0. \quad (14.1)$$

Так как треугольники OCB и OCA прямоугольные, то

$$OA^2-AC^2=OC^2 \text{ и } OB^2-BC^2=OC^2. \quad (14.2)$$

Поэтому из (14.1) и (14.2) следует, что

$$OA\cdot OB\cos\gamma=OC^2+AC\cdot BC\cos\hat{c},$$

т. е.

$$\cos\gamma=\frac{OC}{OA}\cdot\frac{OC}{OB}+\frac{AC}{OA}\cdot\frac{BC}{OB}\cos\hat{c}.$$

Но $\frac{OC}{OA}=\cos\beta$, $\frac{OC}{OB}=\cos\alpha$, $\frac{AC}{OA}=\sin\beta$, $\frac{BC}{OB}=\sin\alpha$.

Поэтому

$$\cos\gamma=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\cos\hat{c} \text{ — } \quad (14.3)$$

аналог теоремы косинусов для трехгранных углов.

Покажем, что эта формула верна для трехгранных углов с любыми гранями. Возможны еще такие случаи.

2) Обе грани α и β — тупые углы. Возьмем тогда луч c', дополняющий луч c до прямой, и рассмотрим трехгранный угол $Oabc'$, дополняющий угол $Oabc$ до двугранного угла.

В нем уже две грани — острые углы, имеющие величины $\pi-\alpha$ и $\pi-\beta$, третья грань — тот же угол γ и тот же противолежащий ей двугранный угол $\hat{c}$ при ребре c'. Поэтому по формуле (14.3)

$$\cos\gamma=\cos(\pi-\alpha)\cos(\pi-\beta)+$$
$$+\sin(\pi-\alpha)\sin(\pi-\beta)\cos\hat{c},$$

а потому (14.3) верно и для этого случая.

3) Один из углов α и β, например α, острый, а другой — β — тупой. Возьмем тогда луч a', дополняющий луч a до прямой, и рассмотрим трехгран-

ный угол $Oa'bc$. В нем две грани — острые углы, имеющие величины α и $\pi-\beta$, третья грань имеет величину $\pi-\gamma$, и величина противолежащего ей двугранного угла равна $\pi-\hat{c}$. Применяя формулу (14.3) для случая 1), получаем: $\cos(\pi-\gamma)=$

$$=\cos\alpha\cos(\pi-\beta)+\sin\alpha\sin(\pi-\beta)\cos(\pi-\hat{c}),$$

откуда следует (14.3) для рассматриваемого случая.

4) Хотя бы один из углов α и β прямой. Тогда равенство (14.3) можно получить предельным переходом из уже рассмотренных случаев 1) — 3).

Итак, формула (14.3) (будем называть ее формулой косинусов) установлена для любых трехгранных углов. Из нее с помощью обычных формул тригонометрии можно получить другие соотношения между элементами трехгранных углов. Выведем, например, аналог теоремы синусов. Для этого из (14.3) найдем $\cos\hat{c}$ и, подставив его в равенство $\sin^2\hat{c}=1-\cos^2\hat{c}$, получаем:

$$\sin^2\hat{c}=1-\cos^2\hat{c}=1-\frac{(\cos\gamma-\cos\alpha\cos\beta)^2}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}=$$

$$=\frac{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}.$$

Поделив на $\sin^2\gamma$, получаем равенство

$$\frac{\sin^2\hat{c}}{\sin^2\gamma}=\frac{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma}. \quad (14.4)$$

Его правая часть симметрична относительно величин α, β, γ. Следовательно, если так же вычислить отношения $\frac{\sin^2\hat{a}}{\sin^2\alpha}$ и $\frac{\sin^2\hat{b}}{\sin^2\beta}$, то справа получим то же выражение, что и в (14.4). Поэтому эти отношения равны, а так как входящие в них синусы все положительны, то получаем следующий *аналог теоремы синусов* для трехгранного угла:

$$\frac{\sin\hat{a}}{\sin\alpha}=\frac{\sin\hat{b}}{\sin\beta}=\frac{\sin\hat{c}}{\sin\gamma}. \quad (14.5)$$

Отметим еще один частный случай формулы (14.3): если двугранный угол при ребре c прямой, то $\cos\hat{c}=0$, и получаем, что

$$\cos\gamma=\cos\alpha\cos\beta. \quad (14.6)$$

Равенство (14.6) является аналогом теоремы Пифагора для «прямоугольного» трехгранного угла: его «гипотенуза» γ выражается через «катеты» α и β.

Признаки равенства трехгранных углов похожи на признаки равенства треугольников. Но есть и отличие: например, два трехгранных угла равны, если соответственно равны их двугранные углы. Вспомните, что два плоских треугольника, у которых соответственные углы равны, подобны. А для трехгранных углов аналогичное условие приводит не к подобию, а к равенству.

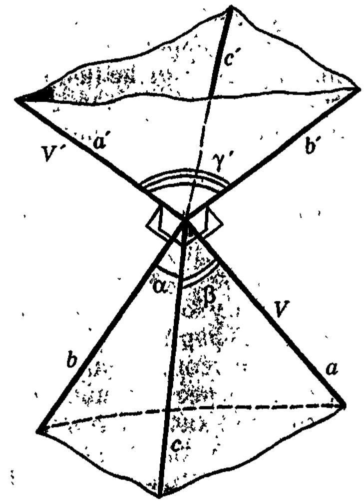


Рис. 164

Трехгранные углы обладают замечательным свойством, которое называется **двойственностью.** Если в какой-либо теореме о трехгранном угле $Oabc$ заменить величины $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$ на $\pi-\alpha$, $\pi-\beta$, $\pi-\gamma$ и, наоборот, заменить α, β, γ на $\pi-\hat{a}$, $\pi-\hat{b}$, $\pi-\hat{c}$, то снова получим верное утверждение о трехгранных углах, двойственное исходной теореме. Правда, если такую замену произвести в теореме синусов (14.5), то снова придем к теореме синусов (она сама себе двойственна). Но если так сделать в теореме косинусов (14.3), то получим новую формулу

$$\cos\hat{c}=-\cos\hat{a}\cos\hat{b}+\sin\hat{a}\sin\hat{b}\cos\gamma. \quad (14.7)$$

Почему имеет место такая двойственность, станет ясно, если для трехгранного угла построить двойственный ему трехгранный угол, ребра которого перпендикулярны граням исходного угла и расположены с V по разные стороны от плоскости соответствующей грани (рис. 164). Обозначим через α', β', γ' соответственно плоские углы граней угла V' со сторонами, перпендикулярными ребрам a, b, c угла V. Тогда имеем равенства

$$\alpha'=\pi-\hat{a},\ \beta'=\pi-\hat{b},\ \gamma'=\pi-\hat{c} \quad (14.8)$$

(см. пункты 14.4 и 14.5).

Поскольку ребра угла V перпендикулярны граням угла V', то угол V тоже будет двойственным к углу V', т. е. двойственность углов V и V' — взаимна. Поэтому справедливы также равенства, аналогичные равенствам (14.8):

$$\alpha=\pi-\hat{a}',\ \beta=\pi-\hat{b}',\ \gamma=\pi-\hat{c}'. \quad (14.9)$$

Благодаря равенствам (14.8) и (14.9) и возможны те замены в тригонометрических соотношениях для трехгранных углов, о которых было сказано. Подробнее о двойственных многогранных углах сказано в 11-м классе в п. 33.3.

Задачи

Разбираемся в решении

14.1.(5). Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Вычислите угол, который образуют плоскости AB_1C_1 и A_1B_1C.

Решение.

Если вычислять этот угол с помощью его линейного угла, то можно встретить определенные трудности при построении линейного угла одного из получившихся двугранных углов. В самом деле (рис. 165), перпендикуляры из точек A и A_1 на общую прямую этих плоскостей не попадут в одну и ту же точку этой прямой (?). Значит, продолжая все же идти по этому пути, придётся проделать еще какие-то построения (?). Это решение можно довести до результата, но красивым его не назовешь.

Можно выбрать другой двугранный угол между этими плоскостями, и решение окажется более быстрым (?). Другой путь решения основан на задаче 14.5.

Действительно, так как $(D_1A)\perp(A_1B_1C)$ и $(D_1C)\perp(AB_1C_1)$ (?), то искомый угол равен углу между (D_1A) и (D_1C). А этот угол можно найти устно (?).

Этот способ вычисления двугранных углов стоит запомнить. Но он не является универсальным. Бывает так, что перпендикулярные плоскостям прямые расположены не столь удачно, как здесь (придумайте сами такой случай). Более общие методы вычисления углов будут рассмотрены позднее.

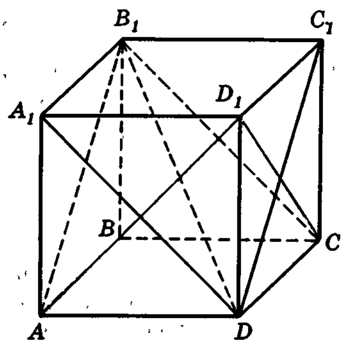


Рис. 165

Дополняем теорию

14.2.(2). Пусть прямая c является проекцией прямой a на плоскость α, а прямая b лежит в плоскости α. $\varphi=\angle(a, b)$, $\varphi_1=\angle(a, c)$, $\varphi_2=\angle(b, c)$. Докажите, что $\cos\varphi=\cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_2$. Какие следствия можно получить из этой формулы, в частности для лучей?

14.3.(3). Докажите, что угол между прямой и плоскостью не больше угла между прямой и плоскостью и не больше угла между этой прямой и любой прямой плоскости.

14.4.(4). Биссектором двугранного угла называется такая полуплоскость, которая выходит из его ребра и делит его на два равных двугранных угла. Докажите, что биссектор двугранного угла является множеством точек угла, равноудаленных от его граней.

14.5.(5). Докажите, что угол между двумя плоскостями равен углу между прямыми, перпендикулярными к этим плоскостям.

14.6.(5). Две плоскости α и β пересекаются. φ — угол между α и β. В одной из них расположен треугольник. Он проектируется на другую плоскость.

Рисуем

Докажите, что площадь его проекции равна площади данного треугольника, умноженной на $\cos\varphi$. Обобщите это утверждение.

14.7.(2). Нарисуйте луч AB. Нарисуйте фигуру, которую образуют все лучи AX, составляющие с лучом AB данный угол.

14.8.(3). Пусть $O \in \alpha$. Нарисуйте фигуру, состоящую из всех лучей OX, таких, что каждый из них образует с α один и тот же угол.

Представляем

14.9.(2). Точка A не лежит на прямой a. Какую фигуру образуют все прямые, проходящие через точку A и перпендикулярные прямой a?

14.10.(3). Плоскости α и β пересекаются. Вершина переменного луча лежит на прямой их пересечения, а сам он образует равные углы с этими плоскостями. Какую фигуру образует множество таких лучей?

14.11.(5). Какой фигурой является множество биссектрис всех линейных углов данного двугранного угла?

Планируем

14.12.(5). Прямая лежит внутри двугранного угла величиной φ. Она параллельна каждой грани этого угла. Известны расстояния от нее до каждой из граней. Как найти расстояние от нее до ребра двугранного угла? Выберите сами численные данные и получите результат.

Находим величину

14.13.(1). В прямоугольном параллелепипеде боковое ребро составляет с его диагональю угол φ_1, а с диагональю боковой грани — угол φ_2. Найдите угол φ, который составляет с диагональю боковой грани диагональ параллелепипеда. (Все три отрезка выходят из одной вершины.)

14.14.(1). Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. 1) Вычислите угол φ, образованный лучами AD и: а) B_1C; б) A_1B; в) DB_1; г) D_1B; д) CA_1. 2) Вычислите угол между скрещивающимися диагоналями граней куба. 3) Возьмите сами любую пару прямых, определенную серединами ребер куба, и вычислите угол между ними.

14.15.(2). Пусть $PABC$ — правильный тетраэдр, точка Q — центр его основания, точка K — середина ребра PB, точка L — середина ребра AC. Вычислите угол φ между прямыми: а) AP и BC; б) AP и CQ; в) AP и CK; г) AK и BC; д) AK и PL; е) AQ и KL.

14.16.(3). Отрезок AB имеет длину 1 и упирается концами в две перпендикулярные плоскости α и β, причем $A \in \alpha$, $B \in \beta$. Прямая AB образует с плоскостью α угол φ_1, а с плоскостью β — угол φ_2. а) Найдите длины проекций отрезка AB на каждую из плоскостей и на прямую их пересечения. б) Найдите угол φ между (AB) и прямой пересечения плоскостей.

14.17.(3). Пусть $PABC$ — правильный тетраэдр. Вычислите угол φ, который составляет: а) ребро с плоскостью грани, в которой оно не лежит;

б) апофема боковой грани с плоскостью основания; в) высота с плоскостью боковой грани.

14.18.(3). Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Вычислите углы, которые образуют: а) (DC_1) с плоскостями граней куба; б) (DB_1) с плоскостями граней куба; в) (A_1D) с (AB_1C_1); г) (A_1C) с (AB_1C_1); д) (A_1D) с (BDC_1); е) (B_1D) с (BDC_1); ж) (CB_1) с (BDC_1).

14.19.(5). Две вершины A и B треугольника ABC лежат в плоскости α. $|C\alpha| = d_1 \neq 0$. Найдите угол φ между плоскостью ABC и α, если: а) треугольник ABC равносторонний со стороной d; б) треугольник ABC прямоугольный равнобедренный с гипотенузой d, причем $\angle C = 90°$ (в другом варианте $\angle A = 90°$); в) треугольник ABC прямоугольный с гипотенузой d, причем $\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$ (в другом варианте $\angle A = 90°$, $\angle B = 30°$).

14.20.(5). Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Вычислите углы, образованные плоскостями: а) (AB_1C_1) и (ABC); б) (BB_1D_1) и (AA_1C); в) (AB_1D_1) и (ABC); г) (AB_1D_1) и (BB_1D); д) (DA_1C_1) и (BA_1C_1); е) (C_1BD) и (AA_1C_1); ж) (AB_1D) и (CB_1D).

14.21.(5). Дан правильный тетраэдр. Вычислите угол, образованный: а) плоскостями граней тетраэдра; б) плоскостью, проходящей через две апофемы тетраэдра, и плоскостью основания; в) плоскостью, проходящей через две апофемы тетраэдра, и плоскостью боковой грани; г) плоскостями двух сечений, являющихся квадратами.

14.22.(5). Две плоскости пересекаются. Какой угол образуют между собой плоскости биссекторов образовавшихся углов?

14.23.(5). $PABC$ — правильный тетраэдр с ребром 2. а) $A \in \alpha$, $(PA) \perp \alpha$. Вычислите $|B\alpha|$, $|C\alpha|$. б) $A \in \alpha$, $|B\alpha| = |C\alpha| = 1$. Вычислите $|P\alpha|$.

14.24.(5). Луч света падает на одну из граней двугранного угла в плоскости, перпендикулярной его ребру. При какой величине двугранного угла этот луч, двукратно отраженный от его граней, пойдет в направлении, противоположном первоначальному?

Ищем границы

14.25.(2). Пусть $PABC$ — правильный тетраэдр. PQ — его высота. Точка X лежит на ребре PC, точка Y лежит на грани APC, точка Z лежит на ребре AB. В каких границах лежит угол, который составляет с высотой PQ прямая: а) AX; б) XZ; в) BY?

14.26.(3). $\angle a\alpha = \varphi_1$, $\angle b\alpha = \varphi_2$. В каких границах лежит $\angle ab$?

14.27.(3). $\alpha \perp \beta$, $\angle a\alpha = \varphi$. В каких границах лежит $\angle a\beta$?

14.28.(3). Плоскости α и β пересекаются. На плоскости α взята точка A. Какая прямая в плоскости α, проходящая через A, образует с плоскостью β наибольший угол?

14.29.(5). а) Сторона AB треугольника ABC лежит в плоскости α. Пусть угол между (ABC) и α увеличивается. Как изменяется угол между стороной треугольника, не лежащей в α, и α? Решите и обратную задачу. б) Решите аналогичные задачи, если в плоскости α лежит вершина A, а $(BC) \parallel \alpha$.

Доказываем

14.30.(2). Равнобедренный треугольник ABC вращают вокруг основания AB. Точки K и L — два положения его вершины. Докажите, что $(KL)\perp(AB)$.

14.31.(2). В неплоской замкнутой ломаной $ABCDA$ $|AB|=|BC|$ и $|AD|=|CD|$. Докажите, что $(AC)\perp(BD)$.

14.32.(3). Плоскости α и β пересекаются, $a\perp\alpha$, $b\perp\beta$. Докажите, что $\angle a\beta=\angle b\alpha$.

14.33.(3). Даны две плоскости. Постройте прямую, которая: а) образует с ними равные углы; б) образует с одной из них данный угол φ_1, а с другой — данный угол φ_2. Можно ли решить аналогичную задачу для трех плоскостей?

14.34.(3). Даны две прямые. Постройте плоскость, которая: а) проходит через одну из них и образует данный угол с другой; б) образует равные углы с этими прямыми; в) образует с одной из них данный угол φ_1, а с другой — данный угол φ_2. Можно ли решить аналогичные задачи для трех прямых?

14.35.(5). Постройте плоскость, которая образует: а) заданные углы с двумя данными плоскостями; б) заданные углы с данной прямой и данной плоскостью.

Исследуем

14.36.(1). Лучи a и b с общим началом образуют угол φ. Луч x с тем же началом образует с лучом a угол φ_1. Можно ли найти угол между лучом x и лучом b?

14.37.(2). Из каких двух утверждений следует третье: а) $a\perp\alpha$, $b\subset\alpha$, $a\perp b$; б) $a\parallel\alpha$, $b\perp\alpha$, $b\perp a$?

14.38.(2). Проверьте равносильность двух утверждений: 1) прямая a, лежащая в плоскости α, перпендикулярна прямой b; 2) прямая a перпендикулярна прямой b_1 — проекции прямой b на плоскость α.

14.39.(2). Проверьте равносильность двух утверждений: 1) две прямые перпендикулярны и 2) через каждую из них проходит плоскость, перпендикулярная другой прямой.

14.40.(3). $\alpha\perp\beta$, $\beta\perp\gamma$, $\alpha\perp\gamma$, $\angle a\alpha=\varphi_1$, $\angle a\beta=\varphi_2$. Можно ли найти $\angle a\gamma$?

14.41.(3). Из каких двух утверждений следует третье: а) $\angle a\alpha=\varphi$, $\angle a\beta=\varphi$, $\alpha\parallel\beta$; б) $\angle a\alpha=\varphi$, $\angle b\alpha=\varphi$, $a\parallel b$?

14.42.(3). $\angle a\alpha=\varphi_1$, $b\perp\alpha$, $\angle ab=\varphi_2$. Установите связь между φ_1 и φ_2.

14.43.(3). На плоскости α даны две прямые a и b, $\angle ab=\varphi$. Пусть прямая x такова, что $\angle xa=\varphi_1$, $\angle xb=\varphi_2$. Можно ли найти $\angle x\alpha$?

14.44.(3). Плоскости α и β пересекаются по прямой a. Пусть прямая x такова, что $\angle x\alpha=\varphi_1$, $\angle x\beta=\varphi_2$. Можно ли найти $\angle xa$?

14.45.(5). $\angle\alpha\beta=\varphi_1$, $\angle a\beta=\varphi_2$, $a\perp\alpha$. Установите связь между φ_1 и φ_2.

14.46.(5). $\alpha_1\perp\alpha$, $\beta_1\perp\beta$. Верно ли, что $\angle\alpha_1\beta_1=\angle\alpha\beta$? Запишите аналогичное утверждение планиметрии. Верно ли оно?

14.47.(5). Равносильны ли утверждения $\alpha\parallel\beta$ и $\angle\gamma\alpha=\angle\gamma\beta$?

14.48.(5). а) $\alpha\perp\beta$, $\angle\gamma\alpha=\varphi_1$, $\angle\gamma\beta=\varphi_2$. Есть ли связь между φ_1 и φ_2? б) Три плоскости α_1, α_2, α_3 попарно перпендикулярны, $\angle\beta\alpha_1=\varphi_1$, $\angle\beta\alpha_2=\varphi_2$, $\angle\beta\alpha_3=\varphi_3$. Есть ли связь между φ_1, φ_2, φ_3?

14.49.(5). Две пересекающиеся плоскости пересекают третью под равными углами. Установите, где на третьей плоскости находится проекция прямой пересечения данных плоскостей. Сформулируйте и проверьте обратное утверждение.

14.50.(5). Может ли тень от равностороннего треугольника при освещении параллельным пучком света являться прямоугольным треугольником, гипотенуза которого равна стороне данного треугольника?

14.51.(5). $\alpha \perp \beta$. Треугольник проектируется на эти плоскости в виде равностороннего треугольника со стороной 1. Можете ли вы вычислить площадь данного треугольника?

Прикладная геометрия

14.52.(3). Из наблюдательного пункта установили, что расстояние до самолета увеличивается, а угол, под которым он виден над горизонтом, уменьшается. Взлетает он или снижается? Пусть, например, расстояние увеличилось в 1,5 раза, а угол над горизонтом уменьшился с 60° до 45°. Что происходит в этом случае? Получите результат при других числовых данных, выбранных самостоятельно. Попробуйте получить результат в общем случае.

14.53.(5). В характеристике кристалла важную роль играют углы между его гранями. Эти углы требуется узнать, не проводя измерений на самом кристалле. Предложите для этого какой-нибудь способ, лучше всего идею измерительного прибора.

Участвуем в олимпиаде

14.54.(2). Две прямые скрещиваются. На каждой из них взято по отрезку. Пусть a и b — длины этих отрезков, a_1 и b_1 — длины их проекций на другую прямую соответственно. Докажите, что $a \cdot b_1 = b \cdot a_1$.

Задачи к дополнению «Трехгранные углы»

Дополняем теорию

14.55. Докажите, что во всяком трехгранном угле любой плоский угол меньше суммы двух других его плоских углов.

14.56. Докажите, что биссекторы двугранных углов трехгранного угла имеют общий луч.

Планируем

14.57. Известны три плоских угла трехгранного угла. 1) Как вы будете искать: а) угол между его ребром и плоскостью противоположной грани; б) расстояние от некоторой точки ребра до плоскости противоположной грани; в) угол между его ребром и лучом в противоположной грани, выходящим из вершины трехгранного угла; г) угол между лучами в его гранях, выходящими из вершины трехгранного угла; д) угол между ребром и лучом, выходящим из вершины трехгранного угла, если известно, какие углы он составляет с другими ребрами этого угла? 2) Составьте сами аналогичную задачу. 3) Задайте сами численные значения данных углов и получите результат в одной из задач а) — д).

Доказываем

14.58. Получите формулу из задачи 14.2, используя теорему косинусов для трехгранного угла.

14.59. Докажите, что в трехгранном угле против равных плоских углов лежат равные двугранные, а против большего плоского угла лежит больший двугранный угол. Докажите и обратные утверждения.

14.60. Докажите такие признаки равенства трехгранных углов: а) по двум плоским углам и двугранному углу между ними; б) по двум двугранным углам и плоскому углу между ними; в) по трем плоским углам; г) по трем двугранным углам.

14.61. Плоские углы трехгранного угла равны. Через его вершину проведена прямая, составляющая равные углы с его ребрами. а) Докажите, что она составляет равные углы с его гранями. б) Сформулируйте и проверьте обратное утверждение. в) Найдите углы, которые она составляет с ребрами и гранями трехгранного угла, если плоский угол равен φ. г) Докажите, что любая точка этой прямой равноудалена от его ребер и его граней.

14.62. Постройте трехгранный угол по трем его плоским углам. Составьте аналогичные задачи.

Исследуем

14.63. Пусть в трехгранном угле два плоских угла равны. Какими свойствами обладает такой угол? Куда, к примеру, проектируется ребро трехгранного угла, общее для этих углов при проектировании на плоскость противоположной грани?

14.64. Будут ли иметь общую прямую плоскости, проходящие через: а) ребра трехгранного угла и биссектрисы противоположных плоских углов; б) ребра трехгранного угла и перпендикулярные противоположным граням; в) биссектрисы плоских углов трехгранного угла и перпендикулярные плоскостям этих углов?

14.65. Верно ли, что: а) каждый двугранный угол трехгранного угла меньше суммы двух других его двугранных углов; б) сумма всех двугранных углов трехгранного угла больше чем 180°? чем 360°?

14.66. Назовем трехгранный угол прямым, если все его плоские углы прямые. Какие свойства есть у такого угла?

Участвуем в олимпиаде

14.67. Плоские углы APC и BPC трехгранного угла с вершиной P равны по $45°$, а угол APB равен $60°$. Через P проведена прямая PQ, перпендикулярная (PBC). Вычислите угол APQ.

14.68. В трехгранном угле два двугранных угла острые, а плоский угол между ними тупой. Каким по виду будет третий двугранный угол?

Задачи к главе III

Планируем

III.1. В двух перпендикулярных плоскостях лежат два равных круга. Они не имеют общих точек. Как найти расстояние между ними? Выберите сами числовые данные и получите результат. Сможете ли вы решить задачу, если круги не будут равными? если угол между плоскостями будет острым, а не прямым?

Находим величину

III.2. Треугольник ABC равносторонний со стороной 1. (AK) — прямая, перпендикулярная его плоскости. $|AK|=1$. Вычислите: а) расстояние от A до (BKC); б) расстояние между (BK) и (AC); в) угол между прямыми (KC) и (AB); г) угол между (BK) и (AKC); д) угол между (BKC) и (ABK).

III.3. В правильной пирамиде $PABC$ точка K лежит на ребре PB, $|AB|=2$, $\angle APB=\varphi$, $|BK|=x$. Выразите как функцию от x: а) расстояние от B до треугольника AKC; б) расстояние между (AK) и (BC); в) угол между (BC) и (AK); г) угол между (PB) и (AKC); д) угол между (AKC) и (PBC).

III.4. В четырехугольнике $ABCO$ углы при вершинах A и C прямые, $|AO|=$ $=|CO|=2$, $|AB|=x$. Длина перпендикуляра OP к его плоскости равна 1. Выразите как функцию от x: а) расстояние от O до (PAB); б) расстояние от B до (APC); в) расстояние между (AC) и (PB); г) расстояние между (AP) и (OC); д) угол между (PB) и (OC); е) угол между (PC) и (PAB); ж) угол между (PBC) и (PAO).

III.5. Из вершины B ромба $ABCD$ проведен перпендикуляр BK к его плоскости. Пусть сторона ромба равна d, острый угол при вершине A равен φ, а длина перпендикуляра равна x. Найдите как функцию от x: а) расстояние от A до (KCD); б) расстояние между (AK) и (BD); в) угол между (AK) и (BD); г) угол между (CK) и (AKD); д) угол между (AKD) и (CKD).

III.6. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб с ребром 1. Вычислите: а) расстояние от A до треугольника BC_1D; б) расстояние между (A_1C) и (AD); в) угол между (AK_1) и (DK_2), где точки K_1 и K_2 — середины ребер A_1B_1 и BC; г) угол между (CK_3) и (AK_1K_2), где K_3 — середина ребра C_1D_1; д) угол между (A_1CC_1) и $(K_1K_2K_3)$.

III.7. Ребро правильного тетраэдра равно 1. Через середину его высоты проводится сечение, образующее с высотой угол 45° и: а) параллельное стороне основания; б) параллельное боковому ребру; в) перпендикулярное боковой грани. Вычислите его периметр и площадь.

III.8. В правильной четырехугольной пирамиде высота равна 2, а ребро основания равно 1. Через середину высоты под углом φ к плоскости основания проводится сечение: а) параллельное стороне основания; б) параллельное боковому ребру; в) параллельное диагонали основания; г) перпендикулярное боковой грани. Найдите его периметр и площадь.

Ищем границы

III.9. Пусть ребро правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равно 1. В каких границах лежат периметр и площадь его сечения: а) проходящего через B и параллельного (AC); б) проходящего через (AC)?

III.10. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 1. Через D проводится сечение, параллельное (AC). В каких границах лежат его периметр и площадь?

Доказываем

III.11. Прямые a и b скрещиваются. $A_1 \in a$, $A_2 \in a$, $|A_1b| = d_1$, $|A_2b| = d_2$. Отрезок KL — общий перпендикуляр этих прямых ($K \in a$, $L \in b$). Докажите равносильность двух утверждений: а) $d_1 = d_2$; б) $|KA_1| = |KA_2|$.

III.12. Пусть есть луч a и переменный луч x с тем же началом. Будем называть a предельным для x, если угол между a и x стремится к нулю. Докажите, что предельный луч может быть только один.

III.13. Решите о предельных лучах такие задачи: а) Если переменный луч образует с данным лучом угол φ, то и предельный луч образует с ним угол φ. б) Если переменный луч образует с плоскостью угол φ, то и предельный луч образует с этой же плоскостью угол φ. в) Если переменный луч образует равные углы с двумя данными лучами, то и предельный луч обладает тем же свойством. г) Будет ли проекция предельного луча на некоторую плоскость предельным лучом для проекции на эту плоскость переменного луча?

Исследуем

III.14. Концы отрезка упираются в грани двугранного угла величиной φ. а) Есть ли связь между длинами его проекций на плоскости граней угла и на ребро угла? б) Верно ли утверждение: концы отрезка равноудалены от плоскостей граней тогда и только тогда, когда он образует с ними равные углы? в) Пусть известны длина отрезка и расстояния от его концов до плоскостей граней. Можно ли найти расстояние от него до ребра двугранного угла? Можно ли найти угол между ним и ребром двугранного угла? г) Пусть некоторая точка делит отрезок в заданном отношении. При выполнении условий пункта в) можно ли найти расстояние от точки до граней угла? до его ребра?

III.15. Две плоскости α и β пересекаются под углом φ. Треугольник ABC равносторонний. Сторона AB лежит на плоскости α, сторона AC лежит на плоскости β, $\angle((AB), \beta)=\varphi_1$, $\angle((AC), \alpha)=\varphi_2$. Можете ли вы найти углы, которые образует прямая BC с плоскостями α, β с их общей прямой?

III.16. Три плоскости расположены в пространстве произвольным образом, причем известны углы между каждой парой плоскостей. Прямая пересекает каждую из этих плоскостей. Известны углы, которые она образует с двумя из них. Сможете ли вы найти угол, который она образует с третьей из них? Выберите сами числовые данные и получите результат.

III.17. Из точки внутри тетраэдра проведены лучи ко всем его вершинам. При этом образовалось шесть углов между ними. Сможете ли вы найти один из них, если будут известны остальные пять? Сколько углов из этих шести достаточно взять, чтобы найти все остальные?

III.18. Угол между двумя зеркалами равен φ. Луч света падает на одно из них так, что он образует с ним угол φ_1. Отразившись в зеркалах два раза, он образует с другим зеркалом угол φ_2. Можно ли узнать, какой угол составляют падающий и отраженный лучи?

III.19. Пусть дан правильный тетраэдр. Пусть есть некоторая плоскость α. а) Известны расстояния от трех вершин тетраэдра до α. Как найти расстояние от четвертой вершины до α? б) Известны углы, которые составляют с α некоторые ребра тетраэдра. Сколько таких углов должно быть, чтобы найти углы, которые составляют с α остальные его ребра? в) Известны углы, которые составляют с α некоторые грани тетраэдра. Сколько должно быть таких углов, чтобы найти углы, которые составляют с α остальные его грани?

III.20. Прямые OA, OB, OC попарно перпендикулярны. Через точку O проводится перпендикуляр OD на плоскость ABC. Числа $|AD|:|AO|$, $|BD|:|BO|$, $|CD|:|CO|$ обозначим p, q, r соответственно. 1) Докажите, что а) $p^2+q^2+r^2=2$; б) треугольник ABC остроугольный; в) отрезки AD, BD, CD лежат на высотах треугольника ABC. 2) Пусть $p=q=r$. Вычислите $\angle ADB$, $\angle CDB$, $\angle ADC$. 3) Пусть $p=r=2q$. Вычислите те же углы. 4) Какова будет связь между p, q, r, если (OD) будет составлять с плоскостью ABC угол φ? (Эта задача обосновывает некоторые правила аксонометрии. Числа p, q, r называются показателями искажения по аксонометрическим осям. Три координатные оси в пространстве OA, OB, OC изображаются на чертеже как три луча: DA, DB, DC. Угол между этими лучами зависит от соотношения между показателями искажения.)

Переключаемся

III.21. Можно ли расставить на столе четыре бутылки так, чтобы расстояния между их горлышками были равны?

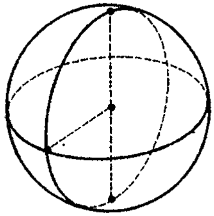
III.22. Почему колбасу режут наискось?

Итоги главы III

В основной части главы III всего две теоремы: в § 12 теорема о ближайшей точке (п. 12.2), частным случаем которой является теорема о трех перпендикулярах, а в § 13 пространственная теорема Пифагора (п. 13.2), которая сама является простым следствием планиметрической теоремы Пифагора. И в § 14 доказаны еще две леммы о сонаправленных лучах. Обе эти теоремы и обе леммы затем будут существенно использованы в главе VIII «Векторы и координаты». Кроме того, в дополнении к § 14 выведены формулы тригонометрии для трехгранных углов. Так что в этой главе в теории преобладает описательный материал. Но мы хотим обратить ваше внимание на то, что в этой главе мы начали доказывать теоремы, которые и по формулировке и по доказательству принадлежат современной математике (теорема о ближайшей точке). Эта линия будет продолжена и в следующих главах.

В целом же содержание глав I—III можно назвать «Началами стереометрии», так как в этих главах речь шла в основном о прямых и плоскостях, а изучение более сложных пространственных фигур начнется с главы IV.

Глава IV



Пространственные фигуры и тела

Мы уже говорили во введении к главе II, что Евклид свои книги о стереометрии начинает такими определениями: «Тело есть то, что имеет длину, ширину и глубину» и «Граница же тела — поверхность». А за ними следуют еще 25 определений, в которых говорится и о сфере, и о конусе, и о цилиндре, но понятие о теле и его определение в них никак не используются. В этой главе мы сначала рассмотрим конкретные виды пространственных фигур — шар и сферу, цилиндры и конусы, а затем в последнем параграфе дадим понятие о теле, причем дать точное определение этого понятия окажется совсем непросто.

Зачем же оно вообще нужно в школьном курсе? Нельзя ли обойтись без него?

Но курс 11-го класса начинается с изучения многогранников, а многогранником называется тело, граница которого состоит из конечного числа многоугольников. А затем речь пойдет об объемах тел, о площадях их поверхностей. Так что о понятии тела мы говорим впрок, имея в виду курс 11-го класса. Хотя те, кого удовлетворит чисто наглядное представление о теле, могут ограничиться знакомством с первым пунктом в § 20 «Тела» или вообще считать, как Евклид, что тело есть то, что имеет длину, ширину и глубину.

§ 15. Сфера и шар

15.1. Понятия сферы и шара

Главу о пространственных (не плоских) фигурах начнем с изучения шара — одной из простейших, но очень богатой разнообразными и важными свойствами фигуры. О геометрических свойствах шара и его поверхности — сферы — написаны целые книги. Некоторые из этих свойств были известны еще древнегреческим геометрам, а некоторые найдены совсем недавно, в последние годы. Эти свойства (вместе с законами естествознания) объясняют, почему, например, форму шара имеют небесные тела и икринки рыб, почему в форме шара делают батискафы и футбольные мячи, почему так распространены в технике шарикоподшипники и т. д. Из этих разнообразных свойств шара мы можем доказать лишь самые простые. Доказательства других, хотя и очень важных, часто требуют применения совсем не элементарных методов, несмотря на то что формулировки таких свойств могут быть и очень простыми: например, доказать, что среди всех тел, имеющих данную площадь поверхности, наибольший объем имеет шар. Определяются сфера и шар в пространстве совершенно так же, как окружность и круг на плоскости.

Определение.

Сферой называется множество точек пространства, удаленных от данной точки на заданное положительное расстояние. При этом данная точка называется *центром сферы*, а данное расстояние — ее *радиусом*.

Таким образом, сфера с центром в точке O и радиусом R есть множество таких точек X в пространстве, для которых $OX=R$.

Определение.

Шаром называется множество точек пространства, находящихся от данной точки на расстоянии, не большем некоторого данного положительного расстояния. Указанная точка называется *центром шара*, а указанное расстояние — *радиусом шара*.

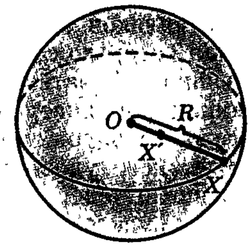


Рис. 166

Таким образом, шар с центром в точке O и радиусом R есть множество точек X в пространстве, для которых $OX \leqslant R$ (рис. 166).

Шар есть объединение множества точек X, для которых $OX=R$, и множества точек X', для которых $OX'<R$.

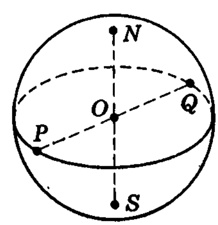


Рис. 167

Множество точек, для которых $OX=R$,— это сфера; она называется **поверхностью шара**; говорят также, что она ограничивает шар. Точки X' шара, для которых $OX'<R$, называются его **внутренними точками**. Про эти точки говорят также, что они лежат **внутри шара**. Радиусом сферы и шара называют

не только расстояние, но также любой отрезок, соединяющий их центр с точкой на сфере.

Диаметром шара и сферы называют как величину, равную удвоенному их радиусу, так и любой отрезок, по которому пересекает шар прямая, проходящая через его центр (рис. 167). Точки сферы, являющиеся концами диаметра, называются **диаметрально противоположными**.

15.2. Пересечение шара и сферы с плоскостью

Теорема 15.1 *(о пересечении шара и сферы с плоскостью).*

---

1) Если расстояние от центра шара до данной плоскости больше радиуса шара, то плоскость не имеет с шаром общих точек (рис. 168).

2) Если расстояние от центра шара до плоскости равно радиусу шара, то плоскость имеет с шаром и ограничивающей его сферой только одну общую точку (рис. 169).

3) Если расстояние от центра шара до плоскости меньше радиуса шара, то пересечение шара с плоскостью представляет собой круг. Центр этого круга находится в основании перпендикуляра, опущенного из центра шара на плоскость, или в самом центре шара, если плоскость проходит через центр. Пересечение плоскости со сферой представляет окружность указанного круга (рис. 170).

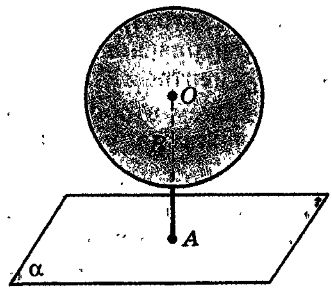


Рис. 168

Докажем эти утверждения. Пусть точка O — центр шара, R — его радиус, точка A — проекция точки O на данную плоскость α, так что $|O\alpha| = |OA|$. Величину $|O\alpha| = |OA|$ обозначим d.

1. $|O\alpha| = d > R$ (рис. 168). Тогда для любой точки X плоскости α выполняются неравенства: $|OX| \geqslant d > R$. Из этого следует, что на плоскости α нет точек шара.

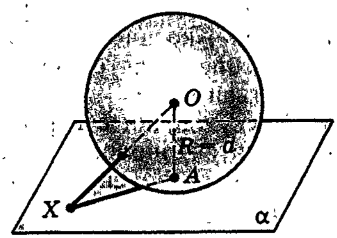


Рис. 169

2. $|O\alpha| = d = R$ (рис. 169), т. е. $|OA| = R$. Тогда для любой точки X плоскости α, отличной от A, $|XO| > R$. Поэтому на плоскости α лежит только одна точка шара — точка A.

3. $|O\alpha| = d < R$ (рис. 170). Докажем, что пересечение шара и плоскости α — круг в плоскости α с центром в точке A и радиусом $r = \sqrt{R^2 - d^2}$. Иначе

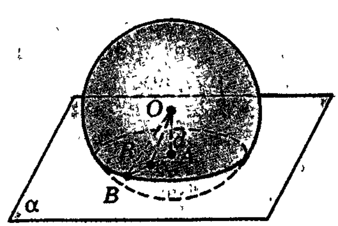


Рис. 170

говоря, надо доказать совпадение двух множеств: первое из них — множество общих точек шара и плоскости; второе — указанный круг.

Для этого докажем два утверждения:

1) Каждая общая точка шара и плоскости принадлежит указанному кругу.

2) Каждая точка указанного круга является общей точкой шара и плоскости.

Докажем первое из них. Пусть точка X — общая для шара и плоскости, причем не совпадает с A. Для нее выполняется равенство $OX^2=OA^2+AX^2=d^2+AX^2$. Так как X лежит в шаре, то $OX\leqslant R$, а значит, $OX^2\leqslant R^2$. Поэтому $d^2+AX^2\leqslant R^2$. Отсюда получаем, что $AX^2\leqslant R^2-d^2$ или $AX\leqslant\sqrt{R^2-d^2}$. Последнее неравенство и означает, что точка X лежит в круге с центром A и радиусом $\sqrt{R^2-d^2}$.

Докажем второе утверждение. Пусть теперь точка X лежит в указанном круге, т. е. в круге на плоскости α с центром в точке A и радиусом $\sqrt{R^2-d^2}$. Для того чтобы она оказалась общей для шара и плоскости, достаточно доказать, что она лежит в шаре, т. е. установить для нее неравенство $OX\leqslant R$. Вы сможете проделать это самостоятельно, проведя выкладки из первого доказательства в обратном порядке.

Заметим, что наше доказательство предполагает, что плоскость α не проходит через центр шара. В случае, когда она проходит через его центр, утверждение остается верным, в чем вы легко можете убедиться сами.

Рассуждения о пересечении сферы с плоскостью проводятся аналогично, только вместо неравенства появляются равенства. Убедитесь в этом самостоятельно! ■

Из формулы $r=\sqrt{R^2-d^2}$ видно, что радиус r будет наибольшим, когда $d=0$, т. е. когда плоскость проходит через центр. Тогда $r=R$. Поэтому такой круг, по которому шар пересекает плоскость, проходящая через центр, называется **большим кругом**, а его окружность — **большой окружностью**.

Каждые две большие окружности пересекаются в двух диаметрально противоположных точках (как это доказать?).

На глобусе экватор представляет собой большую окружность (рис. 171). **Меридианы** — это полуокружности больших окружностей с концами в двух

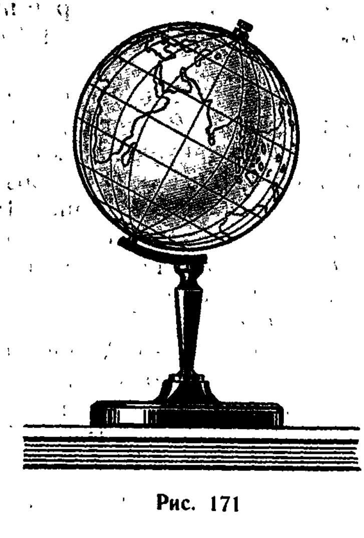


Рис. 171

диаметрально противоположных точках, соответствующих Северному и Южному полюсам. Прямая, проходящая через полюсы, перпендикулярна плоскости экватора. **Параллели** — это окружности, по которым пересекают поверхность глобуса плоскости, перпендикулярные прямой, проходящей через полюсы.

Через любые две диаметрально противоположные точки сферы проходят большие окружности, которые получаются при пересечении сферы с плоскостями, проходящими через эти точки. А через любые две не диаметрально противоположные точки сферы проходит единственная большая окружность, которая получается при пересечении сферы с плоскостью, проходящей через центр сферы и две данные ее точки.

15.3. Касание шара и сферы с плоскостью

В том случае, когда сфера (и ограниченный ею шар) имеет с плоскостью единственную общую точку, говорят, что сфера (и шар) **касается этой плоскости**, а их единственная общая точка называется их **точкой касания**. Из теоремы о пересечении шара с плоскостью вытекает такое следствие.

Теорема 15.2 *(о касании сферы и плоскости).*

Если плоскость касается сферы, то она перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания. Обратно, если плоскость проходит через точку сферы и перпендикулярна радиусу, проведенному в эту точку, то она касается сферы.

Докажите эту теорему самостоятельно.

Плоскость, которая касается сферы, называется **касательной** (или опорной) **плоскостью** этой **сферы.**

Говорят, что **прямая касается сферы,** если она лежит в касательной плоскости к сфере и проходит через точку касания.

Сфера вписана в многогранник, если она касается всех его граней. В этом случае говорят, что **многогранник описан около сферы.** О шаре, сфера которого вписана в многогранник, также говорят, что он вписан в многогранник.

Сфера описана около многогранника, если она проходит через все его вершины. В этом случае говорят, что **многогранник вписан в сферу,** а также в ограниченный ею шар.

15.4. Вид и изображение шара

Шар издали со всех сторон имеет вид круга — вспомните диск Солнца или полной Луны. Это выражено в таком утверждении:

Проекция шара, как и сферы, есть круг того же радиуса. (Здесь и в дальнейшем, говоря просто «проекция», мы имеем в виду ортогональную проекцию на плоскость.)

Докажите это утверждение самостоятельно (рис. 172).

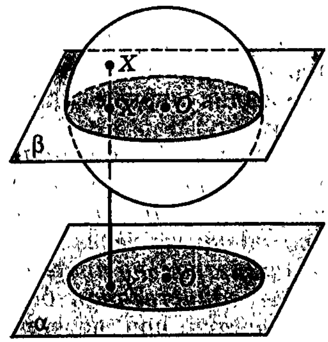


Рис. 172

В согласии с этим утверждением шар и сферу изображают в виде круга. При этом для того чтобы не принять это изображение за изображение круга, его можно подштриховать, но обычно рисуют проекцию какой-нибудь большой окружности, плоскость которой не перпендикулярна плоскости проекции; проекция эта будет, как мы знаем, эллипсом. Центр шара изобразится центром этого эллипса (рис. 173). Если взятая большая окружность принята за экватор, то можно отыскать соответствующие полюсы N и S, помня, что прямая, их соединяющая, перпендикулярна плоскости экватора. Типичная ошибка при изображении полюсов в том, что их рисуют на окружности, ограничивающей изображение шара (рис. 174). На самом же деле изображение точки N должно лежать ниже, а точки S — выше, т. е. так, как изображено на рисунке 173. Параллели также изображаются эллипсами.

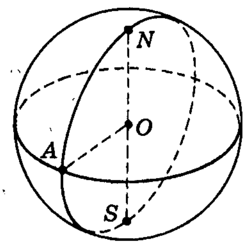


Рис. 173

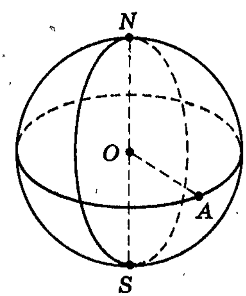


Рис. 174

Замечание. Оказывается, что свойство проекции шара, доказанное в этом пункте, позволяет судить о шарообразности реальных предметов. А именно имеет место следующее утверждение:

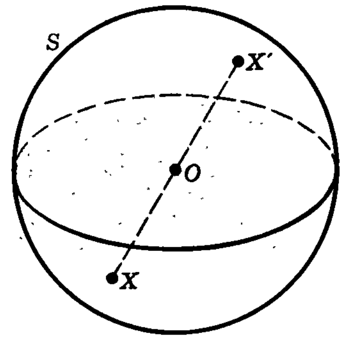
Если проекции фигуры на все плоскости — круги, то фигура эта — сфера в объединении с некоторым множеством внутренних точек. (В результате такого объединения может получиться как шар, так и его часть.) Доказательство этого утверждения сложно и выходит за рамки школьного курса.

15.5. Симметрия сферы и шара

Напомним, что **симметрией фигуры** в курсе планиметрии мы называем свойство фигуры, состоящее в том, что существует ее (нетождественное) движение, совмещающее ее саму с собой. А **движением фигуры** называют отображение этой фигуры, сохраняющее расстояние между точками. Эти же определения сохраняются и в стереометрии.

Изучая важнейшие пространственные фигуры, мы сразу же будем говорить и об их симметрии (иногда оставаясь на интуитивном уровне). Подробно движения в пространстве изучаются в конце курса 11-го класса.

Сфера и шар — самые симметричные фигуры среди ограниченных пространственных фигур. Мы сейчас убедимся в этом. Подробные рассуждения мы проводим для сферы. Аналогичные рассуждения для шара проведите самостоятельно.



$OX'=OX=R$

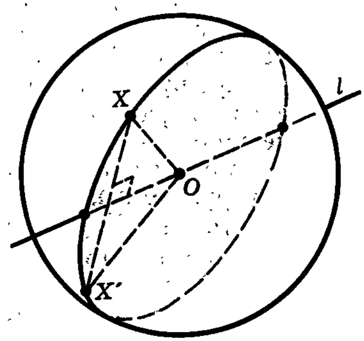
Рис. 175

Во-первых, центр O сферы S (шара U) является ее (его) центром симметрии.

Это значит, что, взяв любую точку X, принадлежащую сфере S, и построив симметричную ей относительно центра O точку, мы получим точку X', также принадлежащую сфере S (рис. 175).

Действительно, точка O — середина отрезка XX', $OX=R$, а потому $OX'=R$ и $X'\in S$. ■

Во-вторых, любая прямая l, проходящая через центр O сферы S (шара U), является ее (его) осью симметрии.



$OX'=OX=R$

Рис. 176

Это значит, что, взяв любую точку X, принадлежащую сфере S, и построив симметричную ей относительно прямой l точку, мы получим точку X', также принадлежащую сфере S (рис. 176).

Действительно, если $X\in S$ и не лежит на прямой l, то прямая l является серединным перпендикуляром отрезка XX', а точка $O\in l$. Поэтому $OX'=OX=R$, т. е. $X'\in S$. Если же $X\in l$, то $X'=X$, а потому $X'\in S$. ■

В-третьих, любая плоскость α, проходящая через центр O сферы S, является плоскостью симметрии сферы S.

Это значит, что, взяв любую точку X, принадлежащую сфере S, и построив симметричную ей относительно плоскости α точку, мы получим точку X', также принадлежащую сфере S (рис. 177).

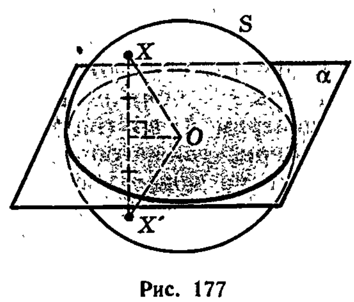


Рис. 177

Действительно, если точка X не лежит на плоскости α, то α перпендикулярна отрезку XX' и все ее точки равноудалены от точек X и X'. Поскольку точка $O\in\alpha$, то $OX'=OX=R$, т. е. $X'\in S$. Если же $X\in\alpha$, то $X'=X$ и $X'\in S$. ■

В-четвертых, любой диаметр AA' сферы S (шара U) является ее (его) осью вращения.

Это значит, что в сечении любой плоскостью α, пересекающей отрезок AA' в некоторой точке B и

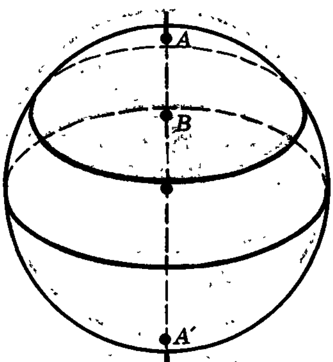


Рис. 178

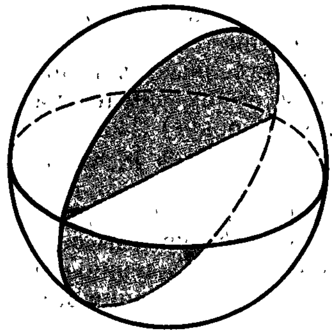


Рис. 179

перпендикулярной ему, получится окружность с центром в точке B (рис. 178).

Это утверждение уже было доказано в п. 15.2.

Любым же сечением сферы S плоскостью, содержащей диаметр, является большая окружность (рис. 179), вращение которой вокруг этого диаметра и образует сферу. Именно так определял сферу Евклид: «Сфера будет: если при неподвижности диаметра полукруга вращающийся полукруг снова вернется в то же самое положение, из которого он начал двигаться, то охваченная фигура и есть сфера». (Говоря «полукруг», Евклид, конечно, подразумевал полуокружность.) Вращение глобуса хорошо иллюстрирует вращательную симметрию сферы.

15.6. Шар и расстояние от точки до фигуры

Представим себе какую-нибудь фигуру F и точку A вне ее. Допустим, в фигуре F есть точка B, ближайшая к точке A. Опишем вокруг точки A шар радиусом $R = |AB|$. Точка B будет лежать на его поверхности (рис. 180). Но внутри шара не будет точек фигуры F, потому что точки внутри шара лежат ближе к центру A, чем точка B, а B — ближайшая к A точка фигуры F.

Значит, если точка B — ближайшая к A точка фигуры F, то она лежит на поверхности такого шара с центром A, внутри которого нет точек фигуры F.

Верно также обратное: если точка B фигуры F лежит на поверхности такого шара с центром A, внутри которого нет точек фигуры F, то такая точка B ближайшая к A. (Это ясно потому, что внутри шара нет точек фигуры F, а значит, они удалены от его центра на расстояние, не меньшее $|AB|$.)

Таким образом, приходим к следующему выводу. *Точка B фигуры F, ближайшая к точке A (лежащей вне F),— это такая ее точка, которая лежит на поверхности шара с центром A, внутри которого нет точек фигуры F.*

Расстояние $|AB|$ от A до ближайшей точки фигуры F есть по определению расстояние $|AF|$ от точки A до фигуры F. Поэтому расстояние от точки до фигуры равно радиусу такого шара с центром в данной точке, внутри которого нет точек данной фигуры, но есть хотя бы одна на его поверхности.

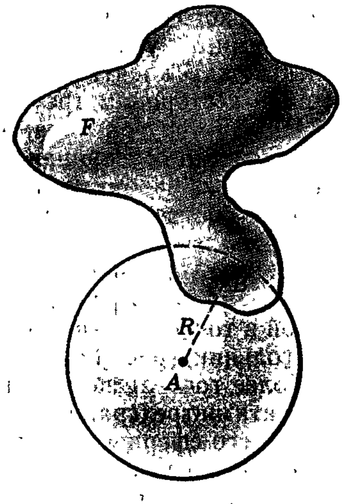


Рис. 180

В связи с этим измерение расстояния от точки A до фигуры F можно представить себе таким образом. Из точки A как из центра раздувается шар, или сфера, пока не достигнет фигуры F. Радиус этой сферы и дает расстояние $|AF|$.

Этим пользуются, определяя расстояние от удаленных предметов с помощью эха. Короткий звук, прозвучавший в точке A, распространяется от нее в виде сферической волны, отражается от препятствия F, едва его достигнув, и возвращается к точке A. Время t, через которое в точке A получается этот отраженный звук,— это время распространения волны от A до F и обратно. Поэтому расстояние $|AF|=\frac{1}{2}vt$, где v — скорость распространения волны.

Так определяют расстояния посредством радиолокации. Из точки A посылают не звуковой, а электромагнитный сигнал, который также распространяется в виде сферической волны. Расстояние $|AF|= =\frac{1}{2}vt$, где v — скорость электромагнитных волн.

Дополнение к параграфу 15

Сферические треугольники

Фиксируем некоторую сферу S радиусом R с центром в точке O и берем на S любые три точки A, B, C, не лежащие на одной большой окружности (рис. 181). Среди них нет точек, лежащих на одном диаметре сферы. Соединим точки A, B, C на S дугами больших окружностей (меньшими полуокружности). Обозначим через α дугу BC, через β дугу AC и через γ дугу AB. Фигура, состоящая из точек A, B, C, дуг α, β, γ и ограниченной ими части сферы S (меньшей полусферы), называется **сферическим треугольником** ABC. Точки A, B, C называются вершинами

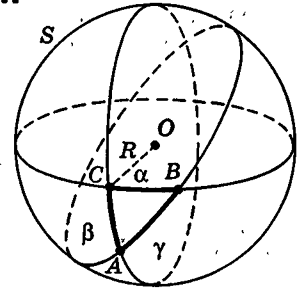


Рис. 181

сферического треугольника ABC, дуги α, β, γ — его сторонами, а углами в его вершинах называются углы между касательными, проведенными из этих вершин к сторонам треугольника (рис. 182).

Между треугольниками на сфере S и трехгранными углами с вершиной в центре O сферы S естественным образом устанавливается взаимно однозначное соответствие: каждому такому треугольнику ABC соответствует трехгранный угол $OABC$, ребра которого a, b, c проходят через вершины треугольника, и, наоборот, каждый трехгранный угол с вершиной в точке O «вырезает» на сфере S сферический треугольник (рис. 183).

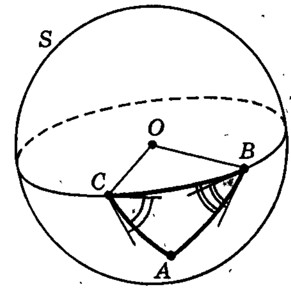


Рис. 182

Более того, легко установить соответствие между элементами трехгранных углов и элементами соответствующего сферического треугольника, т. е. длинами его сторон и величинами его углов.

Во-первых, так как касательные к окружности перпендикулярны радиусам, проведенным в точку касания, то *углы сферического треугольника равны соответствующим двугранным углам того трехгранного угла, который «вырезает» из сферы данный сферический треугольник* (рис. 184):

$$\angle A=\hat{a},\ \angle B=\hat{b},\ \angle C=\hat{c}. \qquad (15.1)$$

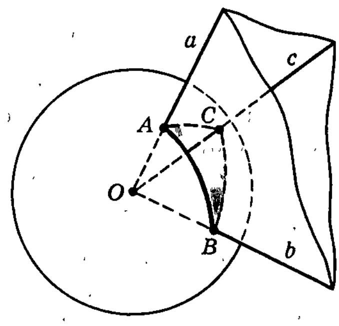


Рис. 183

Во-вторых, так как длина дуги окружности равна произведению радиуса и величины соответствующего центрального угла в радианах, то стороны α, β, γ сферического треугольника ABC выражаются через величины углов граней α_0, β_0, γ_0 соответствующего трехгранного угла по формулам

$$\alpha=R\alpha_0,\ \beta=R\beta_0,\ \gamma=R\gamma_0. \qquad (15.2)$$

Из полученных равенств (15.1) и (15.2) и доказанных в дополнении к § 14 теорем синусов и косинусов для трехгранных углов можно получить соответствующие теоремы для сферических треугольников.

Например, обобщение теоремы синусов выражается так:

$$\frac{\sin\frac{\alpha}{R}}{\sin A}=\frac{\sin\frac{\beta}{R}}{\sin B}=\frac{\sin\frac{\gamma}{R}}{\sin C}, \qquad (15.3)$$

а аналог теоремы Пифагора для прямоугольного сферического треугольника имеет такой вид:

$$\cos\frac{\gamma}{R}=\cos\frac{\alpha}{R}\cdot\cos\frac{\beta}{R}. \qquad (15.4)$$

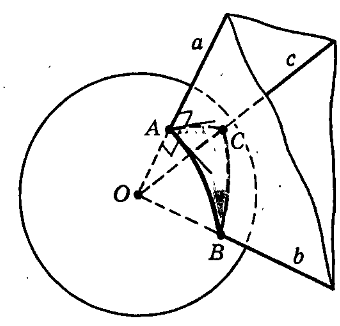


Рис. 184

Задачи

Разбираемся в решении

15.1.(2). Даны два круга одного шара, окружности которых лежат на сфере и имеют единственную общую точку. Докажите, что прямая пересечения плоскостей, в которых лежат эти круги, имеет с шаром единственную общую точку.

Решение.

Пусть (рис. 185) точка O — центр шара, точки O_1 и O_2 — центры данных кругов, α и β — плоскости, в которых они лежат, A — общая точка этих кругов, a — общая прямая плоскостей α и β.

Для доказательства достаточно установить, что a является касательной хотя бы к одной из данных окружностей. В самом деле, пусть a — касательная к окружности с центром O. Проведем (OA) и (O_1A). Что же мы видим? Если a — касательная, то $a \perp (O_1A)$. Но тогда $a \perp (OA)$ (?). Отсюда следует, что a — касательная к большой окружности, которая получается в сечении шара плоскостью, проходящей через O и a. Но тогда a имеет с шаром единственную общую точку (?).

Осталось доказать, что a действительно касательная хотя бы к одной из данных окружностей. Пусть это не так, т. е. a не является касательной ни к одной из них. Тогда рисунок будет такой (?) (рис. 186). Центр шара O лежит на перпендикуляре к α, проходящем через точку O_1, и на перпендикуляре к β, проходящем через точку O_2. Однако непохоже, чтобы эти перпендикуляры пересекались...

И в самом деле, если бы это произошло, то точка O была бы равноудалена от трех точек A, B, C прямой a, что невозможно.

Итак, a — касательная хотя бы к одной из данных окружностей, а тогда, как мы уже показали, она имеет с шаром единственную общую точку.

Заметим к этому доказательству, что нам хватило того обстоятельства, что a — касательная хотя бы к одной из данных окружностей. На самом деле a — касательная к каждой окружности (?), но в процессе доказательства это не понадобилось.

Доказательство получилось не слишком коротким, да еще с элементами от противного. Нельзя ли короче? (Этот вопрос всегда уместен!) Можно. Вот более короткое рассуждение.

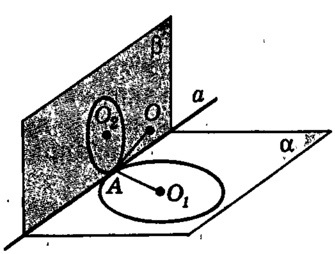


Рис. 185

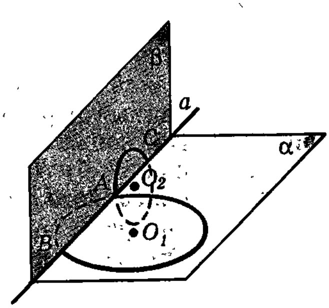


Рис. 186

Пусть a имеет с шаром еще одну общую точку — назовем ее B. Так как $B \in a$, то $B \in \alpha$. Кроме того, B принадлежит шару. Значит, B принадлежит сечению шара плоскостью α, т. е. кругу с центром O_1. Аналогично B принадлежит кругу с центром O_2. Получилось, что данные круги имеют еще одну общую точку, что противоречит условию.

Ясно, что получилось короче, но осталось от противного. А нельзя ли напрямую? Можно! Обозначим данные круги K_1 и K_2, а шар $Ш$. Тогда

$$\{A\} = K_1 \cap K_2 = (Ш \cap \alpha) \cap (Ш \cap \beta) = Ш \cap (\alpha \cap \beta) = Ш \cap a.$$

Всего одна строчка! Причем любопытно, что в этом рассуждении не использовалось то условие, что даны именно шар и круги. Да, но что же тогда использовалось и что мы на самом деле доказали? Тут есть над чем подумать...

Что касается самой задачи, то интересно вот что. Уже зная, что a имеет с шаром единственную общую точку, мы легко получаем, что a — касательная к каждой из данных окружностей (?). Если же эти два круга не лежат в одном шаре, то, как легко видеть, a может и не быть их общей касательной (?). Таким образом, принадлежность двух кругов одному шару и наличие у них общей касательной равносильны (если круги не лежат в одной плоскости).

Дополняем теорию

15.2.(1). Докажите, что линия, по которой пересекаются две сферы, является окружностью.

15.3.(2). Докажите, что центр шара лежит на: а) прямой, перпендикулярной любому его круговому сечению и проходящей через его центр; б) прямой, проходящей через центры двух его круговых сечений, лежащих в параллельных плоскостях.

15.4.(2). На сфере проведены две окружности, имеющие единственную общую точку. а) Докажите, что центр сферы, центры обеих окружностей и общая точка лежат в одной плоскости. б) Можно ли установить зависимость между радиусом сферы и радиусами этих окружностей?

15.5.(3). Докажите, что можно вписать сферу в такие многогранники: а) правильную пирамиду; б) тетраэдр.

Представляем

15.6.(1). Какой фигурой является множество точек пространства, из которых данный отрезок виден под заданным углом?

15.7.(2). На сколько частей разбивают сферу: а) две окружности, расположенные на ней; б) три окружности, расположенные на ней; в) плоскости граней вписанного в нее тетраэдра; г) плоскости граней призмы, находящейся внутри ее?

15.8.(2). Три окружности расположены так, что никакие две не лежат в одной плоскости и каждые две пересекаются в двух точках. Лежат ли эти окружности на одной сфере?

15.9.(3). Четыре плоскости расположены так, что никакие три из них не проходят через одну прямую, а все четыре не имеют общей точки. Сколько существует сфер, касающихся этих плоскостей?

Планируем

15.10.(2). а) На данной сфере даны три точки. Расстояния между этими точками известны. Как найти расстояние от центра сферы до плоскости, проходящей через эти точки? до треугольника с вершинами в этих точках? б) Каждая сторона данного треугольника имеет с данной сферой единственную общую точку. Как найти расстояние от центра сферы до плоскости треугольника? до самого треугольника?

15.11.(3). Через одну прямую проведены к шару две опорные плоскости. Известны радиус шара и расстояние между точками касания шара с этими плоскостями. Как найти угол между этими плоскостями? Как найти расстояние от шара до общей прямой этих плоскостей? Выберите сами числовые данные и получите результат.

15.12.(3). На плоскости лежат три шара известных радиусов. Каждые два из них касаются. К ним проведена еще одна общая опорная плоскость. Как найти угол, который она составляет с данной плоскостью?

15.13.(3). Шар касается плоскости α в точке A. Его радиус R. Плоскость β пересекает шар по кругу радиусом r. С плоскостью α плоскость β образует угол φ. Как найти расстояние от A до прямой пересечения α и β?

Находим величину

15.14.(2). Найдите длину шестидесятой параллели Земли. Во сколько раз она длиннее такой же параллели на Луне? Решите задачу в общем случае для произвольной параллели.

15.15.(2). а) На сфере радиусом 2 расположены три окружности радиусом 1, каждые две из них касаются. Как вычислить радиус окружности, расположенной на этой сфере и касающейся каждой из данных окружностей? б) На сфере радиусом 1 расположены четыре равные окружности, каждая из которых касается трех других. Как вычислить радиусы этих окружностей?

Ищем границы

15.16.(2). На сфере данного шара даны две точки. Через них проводятся всевозможные сечения этого шара. Какое из них имеет наибольшую площадь? наименьшую площадь?

15.17.(2). Точки A и B лежат на поверхности шара радиусом 4 с центром в точке O. $|AB|=2$. Каждый из двух отрезков AX и BX имеет с данным шаром единственную общую точку. При этом $|AX|=|BX|=3$. В каких границах лежит $|OX|$?

15.18.(3). На плоскости лежат два шара радиусами R_1 и R_2. Они имеют единственную общую точку. а) На какой высоте над плоскостью находится их общая точка? б) На каком расстоянии между собой находятся точки касания шаров с плоскостью? в) Чему равен радиус наименьшей сферы, которая касается данных шаров и плоскости, и радиус наибольшей сферы?

15.19.(3). Шар лежит на плоскости α. К нему проведены две опорные плоскости, образующие между собой угол φ, а с α — равные углы. В каких границах лежат эти углы?

15.20.(2). На какое наибольшее число частей могут разделить пространство: а) две сферы; б) три сферы; в) сфера и поверхность куба?

15.21.(3). Шар радиусом R лежит на плоскости. Отрезок длиной d имеет с шаром единственную общую точку. Один его конец лежит на сфере, а другой конец — на плоскости. В каких границах находится расстояние между точкой касания и концом отрезка на плоскости?

15.22.(3). а) Шар радиусом R касается каждой из двух перпендикулярных плоскостей. Чему равен радиус наименьшего шара, касающегося этого шара и данных плоскостей? б) Решите аналогичную задачу в ситуации, когда шар касается трех попарно перпендикулярных плоскостей. в) Можете ли вы без вычислений установить, какой из касающихся шаров из пунктов а) и б) будет больше? г) Составьте аналогичные задачи для случая, когда угол между плоскостями будет отличен от прямого.

Доказываем

15.23.(2). Прямая имеет общую точку с шаром, причем эта точка является внутренней точкой шара. Докажите, что эта прямая со сферой этого шара имеет две общие точки.

15.24.(2). Из точки, взятой вне шара, проводятся все лучи, имеющие с шаром единственную общую точку. Докажите, что: а) отрезки этих лучей от данной точки до шара равны; б) общие точки этих лучей и шара образуют окружность.

15.25.(2). Окружность имеет со сферой три общие точки. Докажите, что она лежит на этой сфере.

15.26.(3). Постройте плоскость, опорную к данному шару и проходящую через: а) данную точку; б) данную прямую.

15.27.(3). Через точку касания шара и плоскости проведены хорды шара одинаковой длины. Докажите, что они образуют с плоскостью одинаковые углы. Верно ли обратное утверждение? (Хорда шара — это отрезок, соединяющий две точки на сфере.)

15.28.(3). Через точку A шара проведена к нему опорная плоскость. На прямой OA (точка O — центр шара) взята точка K, не принадлежащая шару. Из нее проведены лучи, имеющие с шаром единственную общую точку. Докажите, что все они образуют с опорной плоскостью равные углы. Проверьте обратные утверждения.

Исследуем

15.29.(2). У каких четырехугольников все вершины могут лежать на одной сфере? Пусть дан один из таких четырехугольников. Можно ли найти расстояние от центра данной сферы до плоскости, в которой лежит этот четырехугольник? до его сторон?

15.30.(2). Шар пересекает две перпендикулярные плоскости по кругам радиусами r_1 и r_2. Можете ли вы найти радиус шара, если: а) данные круги имеют единственную общую точку; б) эти круги имеют общую хорду длиной d; в) расстояние между этими кругами равно d?

15.31.(2). В шаре радиусом R проведены два сечения радиусом r, плоскости которых пересекаются под углом φ. Можно ли установить связь между R, r, φ, если известно, что эти сечения имеют единственную общую точку? Решите аналогичную задачу, если сечения пересекаются по хорде длиной d; если сечения находятся на расстоянии d между собой.

15.32.(2). Даны два шара. Требуется провести плоскость, которая пересекала бы их по равным кругам. При каком положении этих шаров такое возможно? Зависит ли это от размеров шаров?

15.33.(2). Две большие окружности одного шара лежат в перпендикулярных плоскостях. В их общей точке проводится касательная к каждой из них. Какой угол образуют между собой эти касательные? Сформулируйте и проверьте обратное утверждение. Изменится ли результат исходной задачи, если круги не будут большими?

15.34.(2). а) $ABCD$ — прямоугольник, а X — некоторая точка. Известен вид треугольника AXC (по углам). Можете ли вы установить вид треугольника BXD? б) Из каких точек куба его диагональ видна под наименьшим углом?

15.35.(2). Любая плоскость, пересекающая фигуру, пересекает ее по кругу. Является ли эта фигура шаром?

15.36.(3). Существует ли плоскость, опорная: а) к двум данным шарам; б) к трем данным шарам?

15.37.(3). Два шара радиусами R_1 и R_2 лежат на плоскости α и касаются между собой. а) Через их общую точку проводится еще одна их общая опорная плоскость. Как найти угол, который она образует с α? б) К ним проводятся две общие опорные плоскости, каждая из которых перпендикулярна α. Как найти угол, который они образуют между собой? в) Пусть $R_1 = R_2$. К шарам проведены две общие опорные плоскости, составляющие с α равные углы. Можете ли вы найти угол, который составляет с α прямая пересечения этих плоскостей?

Прикладная геометрия

15.38.(2). Какие вам известны доказательства того, что Земля имеет форму шара (в некотором приближении)?

15.39.(2). Из каких соображений, по вашему мнению, мяч делают в форме шара?

15.40.(3). Шар катится по желобу, образованному двумя плоскими поверхностями. По какой линии движется его центр?

Участвуем в олимпиаде

15.41.(2). На сколько частей делят сферу три плоскости, проходящие через ее центр, причем так, что они не проходят через один и тот же диаметр сферы? А если плоскостей четыре? Решите задачу для общего случая.

15.42.(2). Четырехзвенная замкнутая ломаная расположена вокруг сферы таким образом, что каждая ее сторона имеет с данной сферой единственную общую точку. Докажите, что эти четыре общие точки ломаной и сферы лежат в одной плоскости. Будут ли равны суммы противоположных сторон такой ломаной?

§ 16. Опорная плоскость

Шар, положенный на плоскость, опирается на нее одной точкой и лежит по одну сторону от плоскости. Пирамида, стоящая на плоскости основания, опирается основанием на эту плоскость и тоже расположена по одну сторону от нее (рис. 187). Плоскость, на которую опирается шар или пирамида в этих примерах, естественно назвать опорной для этих фигур. В быту мы постоянно встречаемся с опорными плоскостями: плоскость стола является опорной для стоящих на нем предметов; для предмета, упирающегося в пол или стену, их поверхности служат опорными плоскостями; для детали, обрабатываемой на шлифовальном круге, его поверхность тоже служит опорной плоскостью и т. п. Но прежде чем дать точное определение опорной плоскости для любой фигуры, определим аналогичное понятие в планиметрии — опорную прямую.

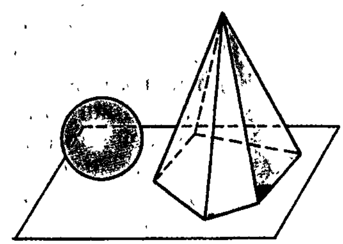


Рис. 187

16.1. Опорная прямая

Будем рассматривать фигуры, в частности прямые, в какой-либо данной плоскости.

Прямая называется **опорной прямой данной фигуры,** если она имеет с фигурой хотя бы одну общую точку и фигура лежит по одну сторону от нее, т. е. содержится в одной полуплоскости, ограниченной этой прямой.

Говорят еще так: **«Прямая, опорная к фигуре в данной ее точке».** Например, на рисунке 188 прямые a и b — опорные к фигуре F в ее точках A и B; фигура F как бы опирается на прямую, отсюда и название «опорная».

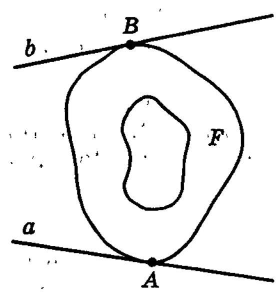


Рис. 188

Касательная к окружности является ее опорной прямой в точке касания, а также опорной к кругу (рис. 189).

Прямая может быть опорной одновременно в нескольких точках фигуры и даже на целом отрезке;

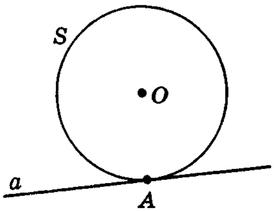


Рис. 189

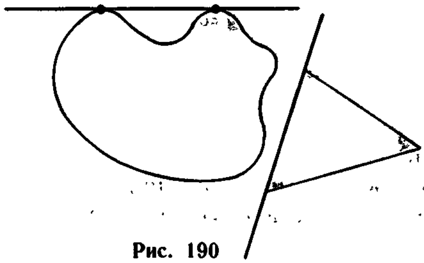


Рис. 190

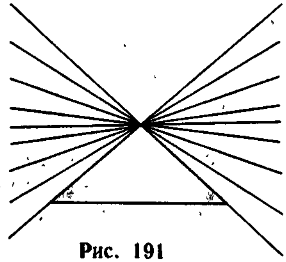


Рис. 191

так, например, прямая, содержащая сторону треугольника, является для него опорной (рис. 190). Может быть и так, что в одной точке фигура имеет сколь угодно много опорных прямых; так, например, через вершину треугольника проходит сколь угодно много опорных прямых (они заполняют два вертикальных угла, рис. 191).

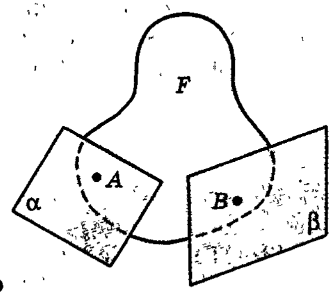


Рис. 192

16.2. Опорная плоскость

Сказанное об опорных прямых в плоскости переносится на опорные плоскости в пространстве.

Определение.

Плоскость называется опорной плоскостью данной фигуры, если она имеет с фигурой хотя бы одну общую точку и фигура лежит по одну сторону от нее, т. е. содержится в одном полупространстве, ограниченном этой плоскостью.

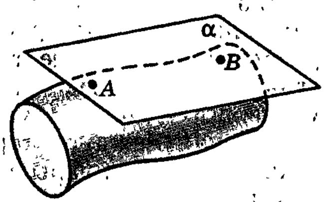


Рис. 193

Говорят еще так: *«Плоскость, опорная к фигуре в данной ее точке»*. Например, на рисунке 192 плоскости α и β опорные к фигуре в ее точках A и B.

Плоскость может быть опорной одновременно в разных точках фигуры (рис. 193) и на целой области; так, плоскость основания пирамиды является ее опорной плоскостью во всех точках основания (рис. 194).

С другой стороны, может быть так, что в одной точке фигура имеет бесконечно много опорных плоскостей, как это будет, например, в вершине пирамиды (рис. 194).

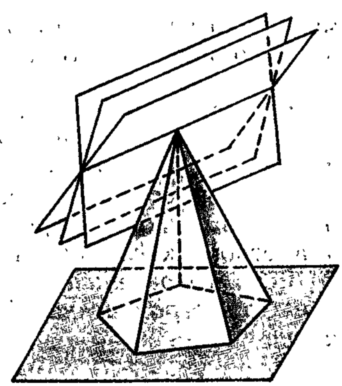


Рис. 194

Для любой фигуры и плоскости могут быть лишь три исключающих друг друга случая их взаимного расположения: 1) *плоскость и фигура не имеют об-*

щих точек; 2) *плоскость является опорной к фигуре;* 3) *плоскость пересекает фигуру, т. е. точки фигуры лежат как в данной плоскости, так и по разные стороны от нее.* Если фигура — шар, то эти три случая были рассмотрены в теореме о пересечении шара и плоскости. Там доказано, что плоскость пересекает шар по кругу и что шар и его опорная плоскость имеют единственную общую точку.

Напомним, что опорная плоскость сферы называется также ее касательной плоскостью и что через каждую точку сферы проходит единственная опорная плоскость — это плоскость, перпендикулярная радиусу сферы, проведенному в эту точку.

16.3. Ограниченные фигуры. Диаметр фигуры

Фигуру называют **ограниченной**, если найдется такое расстояние d, что расстояние между любыми двумя точками фигуры не превосходит d. В противном случае фигуру называют **неограниченной.**

В неограниченной фигуре есть точки, сколь угодно удаленные друг от друга, и никакого наибольшего расстояния между ее точками нет заведомо. Но в ограниченной фигуре могут существовать наиболее удаленные друг от друга точки, пары таких точек, расстояние между которыми наибольшее. В шаре такими являются пары диаметрально противоположных точек.

Но не во всякой ограниченной фигуре есть наиболее удаленные друг от друга точки; их нет, например, на отрезке, у которого исключены концы; их нет и во внутренности шара. Приведите другие примеры.

Расстояние между наиболее удаленными друг от друга точками фигуры (если такие существуют) называется **диаметром фигуры.**

Отрезок, соединяющий наиболее удаленные друг от друга точки фигуры, тоже можно назвать ее диаметром (как и для шара).

Ясно, что *ограниченная фигура лежит в некотором шаре, а неограниченная фигура не лежит ни в каком шаре.*

Дополнение к параграфу 16

Опорные плоскости в концах диаметра

Вспомним теорему 15.2 об опорной (касательной) плоскости сферы. В ней содержится следующее утверждение:

Плоскость, проходящая через конец диаметра шара перпендикулярно этому диаметру, не имеет с шаром других общих точек и служит его опорной плоскостью.

Оказывается, эта теорема обобщается на произвольные фигуры! Именно, выполняется следующая теорема:

Теорема.

Плоскость, проходящая через конец диаметра фигуры перпендикулярно этому диаметру, не имеет с фигурой других общих точек и служит ее опорной плоскостью.

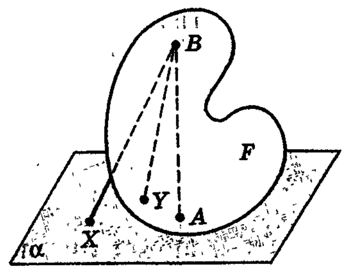


Рис. 195

Доказательство. Пусть отрезок AB — диаметр фигуры F (рис. 195). Проведем через его конец A плоскость α, ему перпендикулярную. Если X — точка этой плоскости, отличная от A, то $BX > BA$, так как перпендикуляр BA короче наклонной BX. По определению диаметр — это наибольшее расстояние между точками фигуры, так что для всех точек $Y \in F$ выполняется неравенство $BA \geqslant BY$. Следовательно, никакая точка Y фигуры F не лежит на плоскости α, кроме самой точки A.

Покажем, что вся фигура F лежит с той стороны от плоскости α, где лежит B (кроме точки A). Действительно, если точки Z и B лежат по разные стороны от плоскости α, то отрезок BZ пересекает плоскость α. Поэтому $BZ > BA$ и точка Z не может быть точкой фигуры F. Итак, плоскость α — опорная плоскость фигуры F в точке A. ■

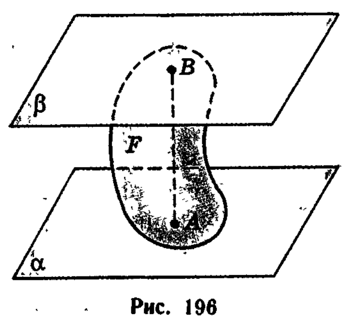


Рис. 196

Замечание 1. Вся фигура, кроме концов диаметра AB, расположена строго между плоскостями α и β, проходящими через его концы A и B перпендикулярно ему (рис. 196). Диаметр фигуры или какого-нибудь предмета — это мера того, что называется линейными размерами или габаритами предмета. Всякий предмет можно поместить в кубическую коробку с ребром, равным диаметру предмета.

Замечание 2. Теорема об опорной плоскости шара оказалась, как мы видим, только частным случаем последней теоремы, относящейся к любым фигурам, лишь бы у них существовали наиболее отдаленные друг от друга точки. При этом доказательство ее ничуть не сложнее. Это примечательно!

Один из моментов в развитии математики состоит в том, что результаты, которые прежде относились к более специальным фигурам, уравнениям, функциям или иным объектам математики, обобщаются позже на гораздо более общие объекты. Теорема 15.2 о сфере восходит к древним грекам, а общее понятие опорной плоскости и доказанная здесь теорема принадлежат геометрии XX в.

Задачи

Рисуем

16.1.(2). Нарисуйте плоскую фигуру, которая в каждой своей точке, где имеется опорная прямая, имеет их бесконечное множество. Нарисуйте аналогичную неплоскую фигуру.

16.2.(2). Наименьшее расстояние между параллельными опорными прямыми (плоскостями) назовем шириной фигуры. Нарисуйте такую плоскую фигуру, отличную от круга, для которой расстояние между любыми параллельными опорными прямыми равно ширине фигуры. Какой будет такая же фигура в пространстве?

Представляем

16.3.(2). Может ли плоская фигура: а) не иметь опорных прямых; б) иметь только одну опорную прямую; в) не иметь опорной прямой только в одной точке; г) иметь опорную прямую только в одной точке? Ответьте на аналогичные вопросы для неплоских фигур.

16.4.(3). Какая плоская фигура имеет ровно один диаметр? ровно два диаметра? ровно три диаметра? больше трех диаметров? (Здесь диаметр понимается как отрезок.) Ответьте на эти вопросы для неплоских фигур.

16.5.(3). Приведите пример фигуры (плоской и неплоской), которая разбивается на две части диаметра, меньшего чем диаметр данной фигуры.

16.6.(3). Можно ли круг разбить на две части диаметра, меньшего чем диаметр круга? а на три такие части? Составьте аналогичную задачу для шара.

Находим величину

16.7.(2). Чему равна ширина: а) круга радиусом 1; б) прямоугольника со сторонами 1 и 2; в) правильного треугольника со стороной 1? Решите задачу для неплоских фигур, аналогичных этим. Попытайтесь решить задачу для фигур из задачи 16.8. Выберите какую-либо фигуру из задачи 16.8, рассмотрите для нее аналогичную фигуру в пространстве и попытайтесь решить эту же задачу.

16.8.(3). Вычислите диаметры таких фигур: а) объединения квадрата и равностороннего треугольника, пересечением которых является их общая сторона; сторона квадрата равна 1; б) объединения равностороннего треугольника и полукруга, причем их пересечением является диаметр полукруга, совпадающий со стороной треугольника; сторона треугольника равна 2; в) объединения квадрата и полукруга, причем их пересечением является диаметр полукруга, совпадающий со стороной квадрата; сторона квадрата равна 2.

Доказываем

16.9.(3). Докажите, что диаметром многоугольника является отрезок, соединяющий его вершины. Докажите аналогичное утверждение для известного вам многогранника.

16.10.(3). Докажите, что фигура, каждая проекция которой ограничена, является ограниченной.

16.11.(3). Дана плоская фигура диаметром 1. Докажите, что она может быть заключена в прямоугольник, площадь которого не больше 1.

Исследуем

16.12.(3). Может ли фигура иметь два параллельных диаметра?

16.13.(3). Существует ли неограниченная фигура, все сечения которой равномерно ограничены (т. е. каждое умещается в круге данного радиуса)?

16.14.(3). Имеется круглое отверстие радиусом 2. Пройдет ли в него: а) куб с ребром 1; б) прямоугольный параллелепипед с ребрами 1, 2, 3; в) правильная треугольная призма, у которой все ребра равны 2; г) правильный тетраэдр с ребром 3; д) четырехугольная пирамида, у которой все ребра равны 2?

§ 17. Выпуклые фигуры

Выпуклые фигуры определяются в стереометрии буквально так же, как в планиметрии. Фигура называется **выпуклой**, если вместе с каждыми двумя своими точками она содержит и соединяющий их отрезок. Примерами выпуклых фигур могут служить отрезок, луч, плоскость, прямая, треугольник, параллелограмм, круг, шар, полупространство, все пространство.

Покажем, например, что шар — выпуклая фигура. Возьмем любые две его точки X и Y. Проведем через них и центр шара плоскость. Сечение шара такой плоскостью согласно теореме 15.1 есть круг. Круг — выпуклая фигура. Значит, каждый отрезок XY лежит в круге данного шара, а тогда и в самом шаре. Тем самым мы доказали, что шар — выпуклая фигура. Одна точка и пустое множество считаются выпуклыми фигурами.

Отметим простое, но важное свойство выпуклых фигур.

Теорема 17.1.

Пересечение любых двух выпуклых фигур есть выпуклая фигура, и, вообще, пересечение любой совокупности выпуклых фигур выпукло[1].

Эту теорему докажите самостоятельно.

Замечание 1. В частности, пересечение данных фигур может быть пустым или одноточечным множеством. Если бы пустое и одноточечное множества не считались выпуклыми, то эти случаи надо было бы исключить из теоремы и ее нельзя было бы сформулировать так, как это сделано.

Замечание 2. Теорема 17.1 позволяет получать выпуклые фигуры путем пересечения каких-либо данных выпуклых фигур. Например, имеют место следующие два утверждения:

Следствие 1.

Пересечение выпуклой фигуры с плоскостью есть выпуклая фигура.

Следствие 2.

Каждая плоскость делит любую выпуклую фигуру на две выпуклые фигуры. Каждая из них есть пересечение исходной выпуклой фигуры с полупространством, ограниченным заданной плоскостью (рис. 197). **Точки исходной фигуры, лежащие в этой плоскости, относятся к каждой из полученных выпуклых фигур.**

---

* Докажем еще следующее утверждение.

Теорема 17.2.

Проекция выпуклой фигуры на плоскость — выпуклая фигура.

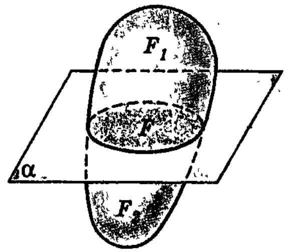


Рис. 197

[1] Эта совокупность может быть совершенно произвольной. Рассмотрите, например, совокупность всех полупространств, содержащих данный шар и ограниченных его опорными плоскостями.

Доказательство. Пусть F — выпуклая фигура и F' — ее проекция на α. Возьмем любые две точки A' и B' фигуры F'. Они являются проекциями некоторых точек A и B фигуры F (рис. 198). Так как отрезок $A'B'$ — проекция отрезка AB и $AB \subset F$, то $A'B' \subset F'$. Поскольку A' и B' — произвольные точки фигуры F', то фигура F' выпукла. ■

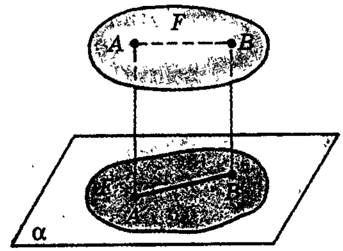


Рис. 198

Задачи

Представляем

17.1. Вернитесь к задачам 16.1, 16.3 — 16.5. Решите их в предположении, что в условии даны выпуклые фигуры.

Доказываем

17.2. Выпуклая фигура содержит три точки, не лежащие на одной прямой. Докажите, что она содержит треугольник с вершинами в этих точках.

17.3. Пусть F — плоская выпуклая фигура, точка $A \notin F$ и лежит в плоскости фигуры F, точка $B \in F$ и является ближайшей к точке A. Докажите, что прямая, перпендикулярная (AB) и проходящая через точку B, является опорной к фигуре F. Обобщите на пространство.

17.4. Пусть F_1 и F_2 — две непересекающиеся выпуклые плоские фигуры и $|F_1F_2| = |AB|$, где $A \in F_1$, $B \in F_2$. Тогда прямые a и b, проведенные соответственно через A и B перпендикулярно (AB), являются опорными к фигурам F_1 и F_2. Докажите это. Верно ли аналогичное утверждение в пространстве?

17.5. На плоскости даны четыре выпуклые фигуры. Каждые три из них имеют общую точку. Докажите, что все четыре имеют общую точку. Обобщите это утверждение. Верно ли оно для невыпуклых фигур?

Исследуем

17.6. Может ли каждое сечение неплоской невыпуклой фигуры быть выпуклой фигурой?

17.7. а) Может ли невыпуклая фигура при проектировании на любую плоскость иметь проекцией выпуклую фигуру? б) Известны проекции фигуры на три попарно перпендикулярные плоскости. По этим проекциям надо восстановить саму фигуру. Имеет ли эта задача единственное решение?

17.8. Фигура F выпуклая, точка A не лежит в ней. Сколько в фигуре F может быть точек, ближайших к A?

17.9. 1) Обязательно ли выпуклая фигура имеет: а) диаметр; б) ширину; в) точку, ближайшую к данной точке вне этой фигуры; г) опорную плоскость? 2) Обязательно ли две выпуклые фигуры имеют ближайшие точки?

17.10. а) Даны выпуклая фигура F и точка $A \notin F$. Точка A соединяется отрезками со всеми точками F. Будет ли объединение всех этих отрезков выпуклой фигурой? Изменится ли результат, если F не будет выпуклой фигурой? б) Даны две выпуклые фигуры F_1 и F_2. Все точки каждой из них соединяются со всеми точками другой. Будет ли объединение всех этих отрезков выпуклой фигурой? Изменится ли результат, если F_1 и F_2 не будут выпуклыми фигурами? Будет ли выпуклой фигурой множество середин всех этих отрезков, если фигуры выпуклые?

17.11. Даны четыре точки A, B, C, D. При этом $|AC|=|BD|=1$. На отрезке AB берется любая точка K. Найдется ли на отрезке CD точка L, такая, что $|KL| \leqslant 1$?

§ 18. Цилиндры

18.1. Определение и свойства цилиндра

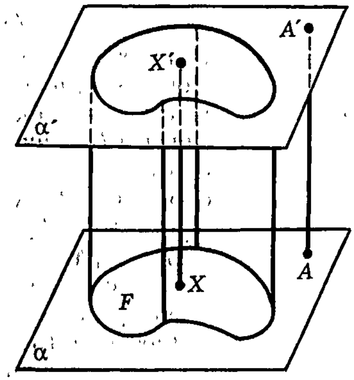


Рис. 199

Цилиндр часто встречается в технике и в быту, например цилиндры двигателя, трубы, шайбы и т. п. Определим, что называется цилиндром в геометрии.

Пусть в некоторой плоскости α задана произвольная фигура F, не лежащая на одной прямой, и из какой-то точки $A \in \alpha$ проведен отрезок AA', не лежащий в α (рис. 199). Из каждой точки X фигуры F проведен отрезок XX', параллельный и равный AA', который лежит по ту же сторону от α, что и отрезок AA'. Фигура C, образованная всеми отрезками XX', называется **цилиндром**. Плоская фигура F называется **основанием цилиндра** C, а отрезки XX' — его **образующими**[1].

Отсюда ясно, что для того, чтобы задать цилиндр, достаточно задать его основание и одну из его образующих.

Обозначим через F' фигуру, состоящую из тех концов X' образующих XX' цилиндра C, которые не лежат в плоскости его основания F — плоскости α. Проведем через точку A' плоскость $\alpha' \| \alpha$. Покажем, что $F' \subset \alpha'$.

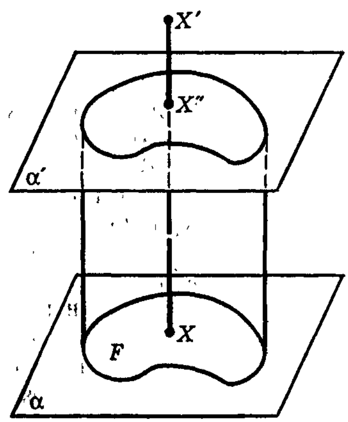


Рис. 200

Действительно, допустим, что некоторая точка X' не лежит в α'. Тогда прямая XX' пересекает α' в некоторой точке $X'' \neq X'$ (рис. 200), и потому $XX'' \neq$ $\neq XX'$. По лемме 12.2 о параллельных отрезках с

[1] Через точки фигуры F можно было бы проводить параллельные друг другу прямые или параллельные друг другу лучи, лежащие по одну сторону от α. Образованные ими фигуры также называют цилиндрами. Но такие цилиндры мы рассматривать не будем.

концами на параллельных плоскостях $XX''=AA'$. Но так как $XX''\neq XX'$, то $XX'\neq AA'$, т. е. пришли к противоречию с определением цилиндра.

Итак, *фигура F' плоская. Она тоже называется основанием цилиндра.* Покажем, что ***основания цилиндра равны.***

Действительно, пусть X и Y — точки основания F, а отрезки XX' и YY', идущие из этих точек,— образующие (рис. 201). Поскольку отрезки XX' и YY' параллельны и равны, то четырехугольник $XYY'X'$ — параллелограмм. Поэтому $XY=X'Y'$. Итак, между точками оснований F и F' установлено соответствие концов образующих, сохраняющее расстояния, т. е. F и F' равны.

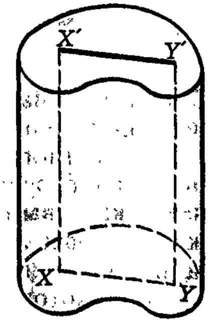


Рис. 201

Дословно так же доказываем, что ***все сечения цилиндра плоскостями, параллельными плоскости основания, равны основаниям цилиндра и между собой*** (рис. 202).

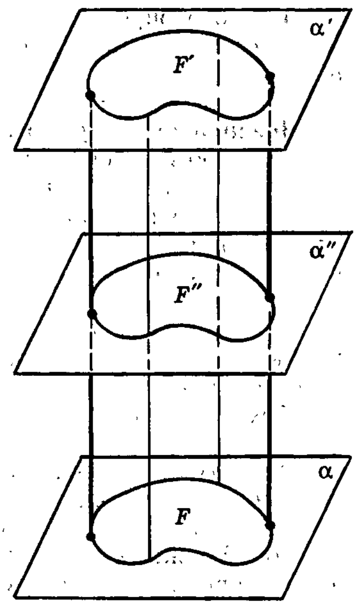


Рис. 202

Поскольку концы каждой образующей цилиндра лежат в плоскостях его оснований, то цилиндр может быть определен и следующим способом. Пусть даны две параллельные плоскости α и α' и на одной из них, например на плоскости α, задана некоторая фигура F (рис. 199). Будем проводить из всех точек $X\in F$ параллельные друг другу отрезки до плоскости α'. Фигура, которую они заполнят — цилиндр.

Перпендикуляр, опущенный из любой точки одного основания цилиндра на плоскость другого его основания, называется **высотой цилиндра**. Длина такого перпендикуляра также называется высотой цилиндра (рис. 203).

Так как две прямые, перпендикулярные одной плоскости, параллельны, то ***все высоты цилиндра параллельны***, а так как высоты лежат между параллельными плоскостями, то такие высоты не только параллельны, но и ***равны друг другу.***

Замечание. Поскольку все образующие цилиндра равны и параллельны друг другу, то можно сказать, что цилиндр заполняется отрезками, полученными друг из друга параллельным переносом (рис. 199). А равенство сечений цилиндра плоскостями, параллельными основаниям цилиндра, позволяет смотреть на цилиндр как на фигуру, «заметенную» сечениями F'', двигающимися параллельно друг другу от основания F до основания F' (рис. 202).

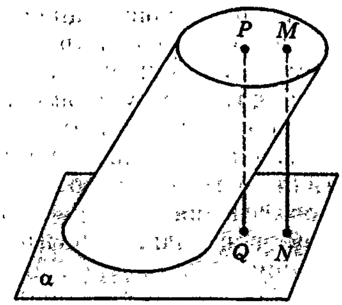


Рис. 203

Цилиндр — это «прямое произведение» основания на образующую.

18.2. Прямой круговой цилиндр

Цилиндр называется **прямым**, если его образующие перпендикулярны основанию. Очевидно, любая образующая прямого цилиндра является его высотой. Прямой цилиндр, основание которого круг, называется **прямым круговым цилиндром** (рис. 204).

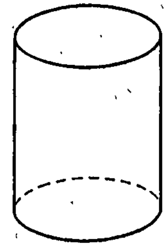


Рис. 204

Боковой поверхностью прямого кругового цилиндра называется фигура, состоящая из тех его образующих, которые соединяют граничные точки оснований цилиндра, т. е. точки двух окружностей, ограничивающих основания цилиндра.

Из этого определения следует, что *боковую поверхность прямого кругового цилиндра саму можно рассматривать как прямой цилиндр, основание которого — окружность.*

Поверхностью прямого кругового цилиндра называется объединение его оснований и боковой поверхности. Поверхность прямого кругового цилиндра иногда называют также его **полной поверхностью**, подчеркивая этим, что она состоит из боковой поверхности и двух оснований.

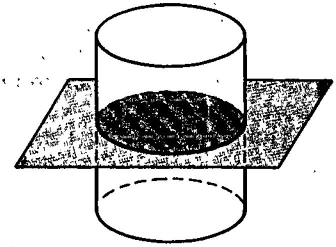


Рис. 205

Так как любое сечение цилиндра плоскостью, параллельной плоскости его основания, равно основанию цилиндра, то *любое сечение прямого кругового цилиндра такой плоскостью есть круг, а сечение его боковой поверхности — окружность этого круга* (рис. 205).

Отрезок, соединяющий центры оснований прямого кругового цилиндра, называется его **осью**. Каждое сечение прямого кругового цилиндра плоскостью, в которой лежит его ось, является прямоугольником, одна сторона которого есть диаметр основания, а другая — образующая цилиндра (рис. 206). Поэтому все такие сечения равны друг другу. Они называются **осевыми сечениями цилиндра.** Ось цилиндра является общей осью симметрии всех его осевых сечений, а сам цилиндр является объединением всех таких равных друг другу прямоугольных сечений. Следовательно, можно сказать, что прямой круговой цилиндр получен вращением прямоугольника вокруг его оси (или вращением прямоугольника — половины осевого сечения — вокруг его стороны). Поэтому прямой круговой цилиндр называют также **цилиндром вращения.**

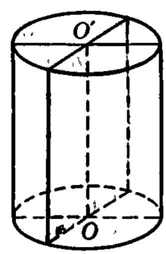


Рис. 206

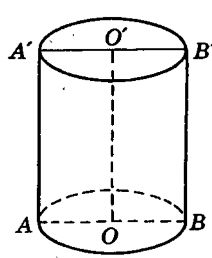


Рис. 207

Как нарисовать цилиндр вращения, видно из рисунка 207.

18.3. Симметрия цилиндра вращения

О вращательной симметрии цилиндра вращения уже сказано в п. 18.2. Именно этим свойством определял цилиндр и Евклид: «Цилиндр будет: если при неподвижности одной из сторон прямоугольного параллелограмма, прилегающих к прямому углу, вращающийся параллелограмм снова вернется в то же самое положение, из которого он начал двигаться, то охваченная фигура и будет цилиндром».

Середина оси цилиндра вращения является его центром симметрии (рис. 208).

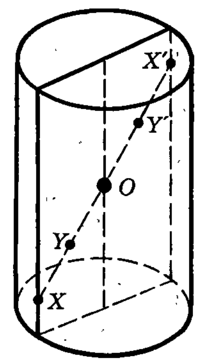
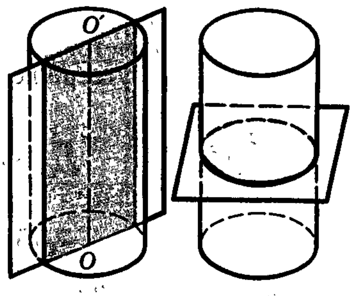


Рис. 208

Цилиндр вращения симметричен относительно любой плоскости α, проходящей через его ось (рис. 209, *а*), а также относительно плоскости, делящей пополам его образующие (рис. 209, *б*).

Наконец, любая прямая l, проходящая через центр симметрии цилиндра вращения и перпендикулярная его оси, является его осью симметрии (рис. 210, *а*). Осью симметрии цилиндра вращения является и его ось (рис. 210, *б*).

Докажите эти утверждения о симметрии цилиндра вращения. Подумайте, как связаны симметрия цилиндра вращения и симметрия его основания — круга.



а) *б)*

Рис. 209

18.4*. Выпуклые цилиндры

Теорема 18.1.

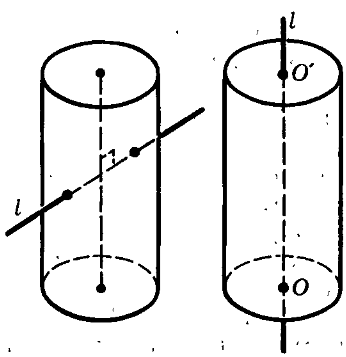
Цилиндр является выпуклым тогда и только тогда, когда его основание выпукло.

Доказательство. Теорема содержит два утверждения.

1) *Если цилиндр выпуклый, то его основание выпукло.*

2) *Если основание цилиндра выпукло, то и сам цилиндр выпуклый.*

Первое утверждение непосредственно вытекает из того, что пересечение всякой выпуклой фигуры плоскостью выпукло (следствие 1 теоремы 17.1), а основания цилиндра являются пересечением данного цилиндра плоскостями этих оснований.



а) *б)*

Рис. 210

Докажем второе утверждение. Пусть основание F цилиндра C выпукло (рис. 211). Возьмем в цилиндре C любые две точки A и B и проведем через них образующие цилиндра XX' и YY'. Если A и B лежат на одной образующей, то отрезок AB лежит в C. Поэтому будем считать, что образующие XX' и YY' различны. Концы этих образующих, лежащие в F,— точки X и Y — являются концами отрезка XY, лежащего в F, так как F выпукло. Поэтому все отрезки ZZ', исходящие из точек Z отрезка XY, параллельные и равные отрезку XX', являются образующими цилиндра C. Следовательно, параллелограмм $XYY'X'$ содержится в C. Так как отрезок AB содержится в этом параллелограмме, то отрезок AB содержится в C. Итак, цилиндр C выпуклый. ■

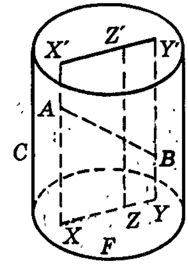


Рис. 211

Замечание. Не только выпуклость, но и другие свойства цилиндра переносятся с основания цилиндра на весь цилиндр. Например, цилиндр имеет центр симметрии тогда и только тогда, когда его основание имеет центр симметрии (рис. 212). Подумайте, нет ли еще сходных утверждений.

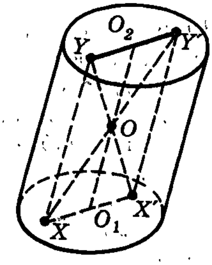


Рис. 212

Дополнение к параграфу 18

Эллипс как сечение цилиндра вращения

Если боковую поверхность цилиндра вращения пересечь плоскостью так, чтобы она не пересекала его оснований, то в сечении получится эллипс (рис. 213). Это следует из определения эллипса как параллельной проекции окружности на плоскость. (Поэтому, наклонив стакан с водой, вы наблюдаете эллипс, рис. 214).

Рассматривая эллипс как сечение цилиндра вращения, докажем важное метрическое свойство эллипса[1], которое дает еще один подход к определению эллипса (а также позволяет его построить, точнее, начертить).

Сумма расстояний от любой точки эллипса до двух точек, называемых фокусами, есть величина постоянная.

Пусть эллипс E получен как сечение боковой поверхности цилиндра вращения C плоскостью α

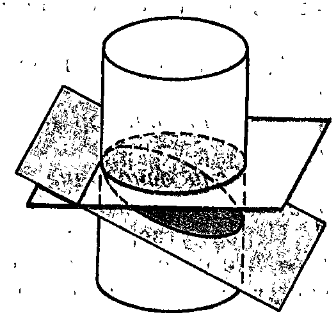


Рис. 213

[1] Метрическими называются свойства, которые выражаются через расстояния.

(рис. 215, *а*). Впишем в цилиндр C две сферы D_1 и D_2, касающиеся как поверхности цилиндра, так и плоскости α (цилиндр можно взять высоким, чтобы D_1 и D_2 не пересекали его оснований). Точки касания шаров D_1 и D_2 с α обозначим F_1 и F_2 и назовем фокусами эллипса. Окружности, по которым D_1 и D_2 касаются цилиндра C, обозначим через S_1 и S_2.

Ясно, что S_1 и S_2 — большие окружности шаров D_1 и D_2, а плоскости, в которых лежат S_1 и S_2, перпендикулярны оси цилиндра C. Поэтому все отрезки образующих цилиндра с концами в точках окружностей S_1 и S_2 равны друг другу. Обозначим их длину через $2a$. Возьмем любую точку $X \in E$. Проведем через X образующую цилиндра C. Она пересечет S_1 и S_2 в точках Y_1 и Y_2. Так как отрезки XF_1 и XY_1 касаются шара D_1 в точках F_1 и Y_1 и имеют общий конец X, то $XF_1 = XY_1$. Аналогично $XF_2 = XY_2$. Поэтому $XF_1 + XF_2 = XY_1 + XY_2 = Y_1Y_2 = 2a$. ■

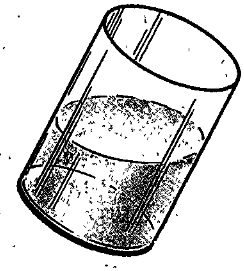


Рис. 214

Из произведенных построений ясно, что прямая F_1F_2 будет осью симметрии эллипса (рис. 215, *б*). Отрезок A_1A_2 этой прямой с концами на эллипсе является большим диаметром эллипса, и длина его равна $2a$ (так как $A_1F_1 = A_2F_2$). Точка O — середина отрезков F_1F_2 и A_1A_2 — будет центром симметрии эллипса. Проходящий через O отрезок B_1B_2, перпендикулярный A_1A_2 с концами на эллипсе, будет малым диаметром эллипса. Его длина $2b$ равна диаметру шаров D_1 и D_2 (диаметру основания цилиндра C). Так как $B_1F_1 = B_1F_2$ и $B_1F_1 + B_1F_2 = 2a$, то $B_1F_1 = a$. Если длину отрезка F_1F_2 обозначить через $2c$, то $OF_1 = OF_2 = c$, и из прямоугольного треугольника OF_1B_1 получаем, что

$$a^2 = b^2 + c^2. \tag{17.1}$$

Эти соотношения и зависимости между элементами эллипса позволяют нам теперь доказать, что множество точек на плоскости, сумма расстояний которых до двух данных точек (называемых фокусами) есть величина постоянная (и большая, чем расстояние между фокусами), является эллипсом.

Действительно, пусть на плоскости α даны две точки F_1 и F_2 и задано некоторое расстояние $2a > |F_1F_2| = 2c$. По этим данным находим из равенства (17.1) радиус $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ шаров D_1 и D_2 и строим эти шары, касающиеся плоскости α в точках F_1 и F_2 по разные стороны от α. Цилиндр C, касающийся шаров D_1 и D_2 (его образующие параллельны пря-

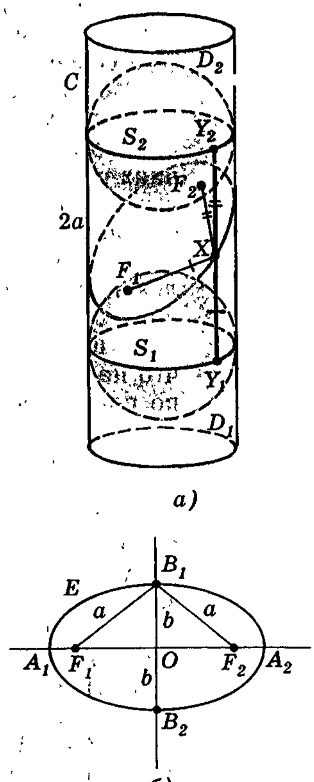


Рис. 215

мой, проходящей через центры D_1 и D_2), пересекает плоскость α по искомому эллипсу, для которого точки F_1 и F_2 — фокусы и $2a$ — сумма расстояний от точек эллипса до фокусов. (Для окружности $F_1 = F_2$, $c = 0$ и $a = b$.)

Опираясь на доказанное свойство, легко нарисовать эллипс. Для этого надо (булавками или кнопками) закрепить нить в двух точках (фокусах эллипса), а затем, натянув ее карандашом, начертить эллипс (рис. 216).

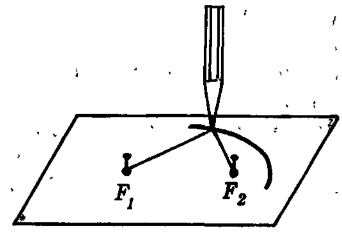


Рис. 216

Задачи

Разбираемся в решении

В задачах слово «цилиндр» везде означает «прямой круговой цилиндр», если нет специальных оговорок.

18.1. Как вычислить расстояние между двумя точками на поверхности цилиндра, если измерения можно проводить только на его поверхности?

Решение.

Могут представиться разные ситуации: 1. Обе точки лежат на боковой поверхности цилиндра. 2. Одна точка лежит на боковой поверхности цилиндра, а другая — на его основании. 3. Обе точки лежат на основаниях цилиндра и при этом: а) на одном и том же основании; б) на разных основаниях. Ситуация а) относится к планиметрии и в данном случае тривиальна.

Наиболее принципиальный случай в ситуации 1. Пусть две точки лежат на боковой поверхности цилиндра. Расстояние между ними надо найти, не забираясь внутрь цилиндра,— это легко себе представить, если цилиндр сделан, к примеру, из металла. (Обратите внимание, что надо найти расстояние между двумя точками в пространстве, а не по поверхности цилиндра.)

Для вычисления расстояния между двумя точками можно воспользоваться соотношениями в треугольнике, где лежит соответствующий отрезок, или пространственной теоремой Пифагора. В данном случае нужный нам треугольник лежит внутри цилиндра, и потому к нему не подобраться. Пойдем другим путем. Применив пространственную теорему Пифагора, проведем три взаимно перпендикулярные прямые, связанные с цилиндром. Пусть одна из них проходит через ось цилиндра, а две другие взаимно перпендикулярные прямые проходят через диаметры нижнего основания (рис. 217). Пусть A и B — данные точки, A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 — проекции отрезка AB на эти три прямые. Тогда согласно пространственной теореме Пифагора $|AB|^2 = |A_1B_1|^2 + |A_2B_2|^2 + |A_3B_3|^2$. Можно заметить, что $|A_2B_2|^2 + |A_3B_3|^2$ равно квадрату длины проекции отрезка AB на плоскость нижнего основания цилиндра (?). $|A_1B_1|$ — разность расстояний точек A и B до плоскости нижнего основания цилиндра. Теперь действуем так: через точки A и B проводим образующие цилиндра до пересечения с нижним основанием в точках A' и B' соответственно. Измеряем $|AA'|$, $|BB'|$ и $|A'B'|$. Находим:

$$|AB|^2 = |A'B'|^2 + ||AA_1| - |BB_1||^2.$$

В остальных случаях задача принципиально решается так же. В случае 3, б) придется преодолеть небольшую техническую трудность — найти проекцию одной из точек на плоскость основания, в которой лежит другая из них (?).

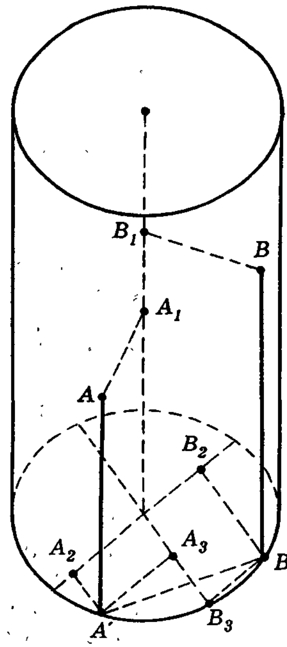


Рис. 217

Условие этой реальной задачи можно усложнить (самим!). Можно, например, сделать естественное предположение о том, что к основаниям цилиндра не подобраться. Скажем, данный цилиндр — это достаточно длинная труба или этих оснований вообще нет — отломаны. Как решить задачу в этом случае?

Как и во всякой задаче с реальными объектами, при решении могут появиться чисто практические вопросы. Например: а какие измерительные приборы имеются? А что можно делать на поверхности цилиндра?

Сначала получите хоть какое-либо решение задачи, и тогда можете считать, что у вас есть любые средства и возможности. Затем постарайтесь свести эти средства и возможности до минимума, буквально до подручных средств. В данной задаче практически можно обойтись только линейкой с делениями (если цилиндр не слишком большой).

Дополняем теорию

18.2. Пусть плоскость, опорная к цилиндру, проходит через образующую на его поверхности. Докажите, что она: а) проходит через прямую, опорную к его основанию; б) перпендикулярна плоскости осевого сечения цилиндра, проходящего через эту образующую. Сформулируйте и проверьте обратные утверждения. Укажите способ построения плоскости, опорной к цилиндру и проходящей через образующую на его поверхности.

18.3. Докажите, что около цилиндра можно описать сферу. Это означает, что найдется сфера, на которой лежат окружности двух оснований цилиндра. **Цилиндр в этом случае называется вписанным в сферу, а сфера — описанной около цилиндра.**

18.4. Через данную прямую проведены к цилиндру две опорные плоскости. Каждая из них проходит через образующую цилиндра. Докажите, что ось цилиндра параллельна данной прямой.

Рисуем

18.5. В этой задаче под цилиндром понимается цилиндр общего вида. Нарисуйте два цилиндра так, чтобы оказалось цилиндром: а) их пересечение и объединение; б) только их пересечение.

18.6. Нарисуйте возможные проекции цилиндра.

Представляем

18.7. На сколько частей можно разрезать цилиндр плоскими разрезами, если их: а) два; б) три; в) четыре?

18.8. Какой фигурой является сечение цилиндра, проходящее через его образующую?

18.9. Сечением цилиндра является прямоугольник. Как расположена его плоскость относительно оси цилиндра?

Находим величину

18.10. Дан цилиндр радиусом R и высотой H. Параллельно его оси проводится сечение цилиндра. а) Выразите его площадь и периметр как $f(x)$, где x — расстояние от оси до сечения. б) На каком расстоянии от такого сечения площадью S будет находиться сечение, параллельное ему, с площадью S? $2S$? $0{,}5S$?

18.11. Дан цилиндр радиусом R и высотой H. Через образующую его поверхности проводятся всевозможные сечения цилиндра. а) Выразите их площадь и периметр как $f(x)$, где x — расстояние от оси до сечения. б) Какой угол образует с плоскостью такого сечения площадью S другое такое же сечение площадью S? $2S$? $0{,}5S$?

18.12. Через данную прямую проведены к цилиндру две опорные плоскости. Каждая из них проходит через образующую цилиндра. Чему равен угол между этими плоскостями, если известны размеры цилиндра и расстояние от данной прямой до образующей цилиндра, лежащей в опорной плоскости?

18.13. Имеются два одинаковых цилиндра радиусом R и высотой H. Расстояние между прямыми, на которых лежат их оси, равно d. Цилиндры имеют общую опорную плоскость, сами они находятся с одной стороны от этой плоскости. Чему равно расстояние между цилиндрами, если в общей опорной плоскости находятся: а) основания обоих цилиндров; б) образующие поверхностей обоих цилиндров; в) основание одного и образующая поверхности другого?

Ищем границы

18.14. Прямая проходит через точки на окружностях обоих оснований цилиндра. Когда она составляет с плоскостями оснований наибольший угол? наименьший угол?

18.15. Даны двугранный угол и цилиндр. Как цилиндр расположить внутри этого угла, чтобы он был ближе всего к ребру этого угла?

Доказываем

18.16. Два цилиндра имеют единственную общую образующую на поверхности каждого из них. Через эту образующую проведена плоскость, опорная к одному из цилиндров. Докажите, что она будет опорной и к другому цилиндру.

Исследуем

18.17. Говорят, что **сфера вписана в цилиндр**, если она касается его оснований, а с его боковой поверхностью имеет одну общую окружность. Установите, в какой цилиндр можно вписать сферу.

18.18. Нарисуйте фигуру, получающуюся в пересечении двух равных цилиндров, оси которых пересекаются под прямым углом. Является ли она выпуклой? Можете ли вы найти ее диаметр, если радиусы цилиндров известны? Считайте, что оси цилиндров длиннее диаметров их оснований.

Прикладная геометрия

18.19. Основание цилиндрической бочки радиусом 0,6 м и высотой 1,6 м находится на полу помещения высотой 1,9 м. Можно ли выкатить бочку из этого помещения?

18.20. Как можно найти радиус цилиндра, если к его основаниям не подобраться, а измерения можно проводить только на его поверхности?

Участвуем в олимпиаде

18.21. Прямая имеет с поверхностью цилиндра больше двух общих точек. Докажите, что она проходит через образующую цилиндра.

§ 19. Конусы. Усеченные конусы

19.1. Определение конуса. Конус вращения

Форму конуса имеют терриконы и вулканы, воронки и колбы (рис. 218) и т. д. В геометрии же конус, как и цилиндр, определяют как фигуру, образованную некоторыми отрезками.

А именно, пусть в некоторой плоскости задана какая-нибудь фигура F, не лежащая на одной прямой, а вне этой плоскости — точка P (рис. 219). Фигура, образованная всевозможными отрезками PX, соединяющими точку P с точками фигуры F, называется **конусом с вершиной P и основанием F**[1].

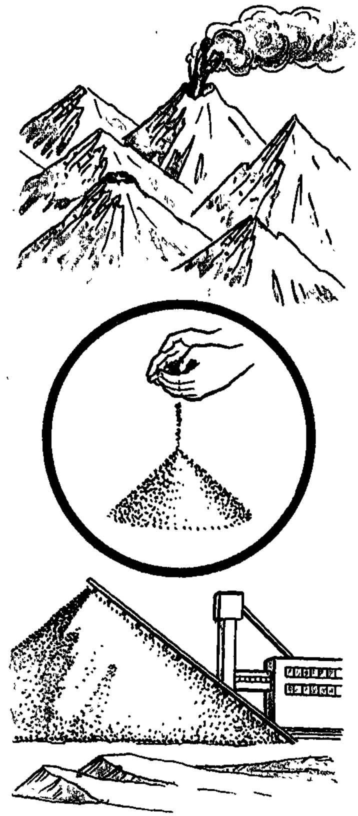
Отрезки, соединяющие вершину конуса с точками его основания, называются **образующими конуса**.

Высотой конуса называется перпендикуляр, опущенный из вершины конуса на плоскость его основания (рис. 220), а также длина этого перпендикуляра.

Прямым круговым конусом или **конусом вращения** называется конус, основание которого — круг, а высота попадает в центр этого круга, т. е. центр оказывается проекцией вершины конуса на основание (рис. 221). Высота конуса вращения называется также его **осью**.

Прямой круговой конус является объединением всех равных друг другу прямоугольных треугольников, имеющих общий катет. Поэтому можно сказать, что он получен вращением прямоугольного треугольника вокруг одного из катетов — оси конуса. Отсюда и название «конус вращения». Именно так определял конус Евклид: «Конус будет: если при неподвижности одной из сторон прямоугольного треугольника, прилежащих к прямому углу, вращающийся треугольник снова вернется в то же самое положение, из которого он начал двигаться, то охваченная фигура и есть конус». Итак, конус вращения обладает вращательной симметрией.

Все сечения конуса вращения плоскостями, содержащими его высоту, являются равными друг другу равнобедренными треугольниками (рис. 222). Каждый из этих треугольников называется **осевым**



[1] Конусами часто называют также фигуры, образуемые лучами, исходящими из одной точки, или прямыми, проходящими через одну точку. У таких конусов образующие не отрезки, а лучи или прямые.

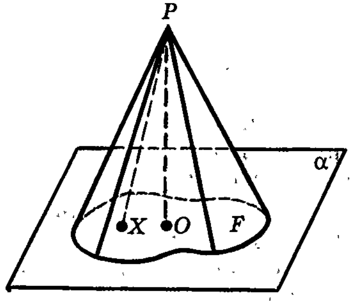


Рис. 219

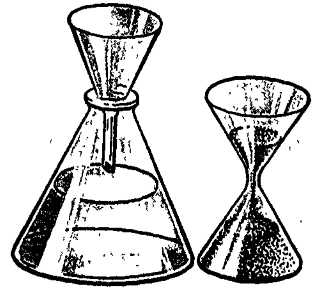


Рис. 218

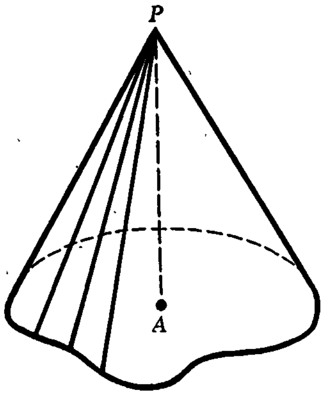


Рис. 220

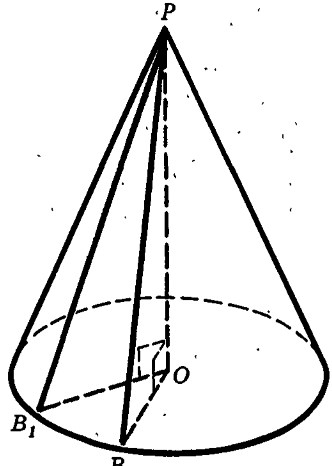


Рис. 221

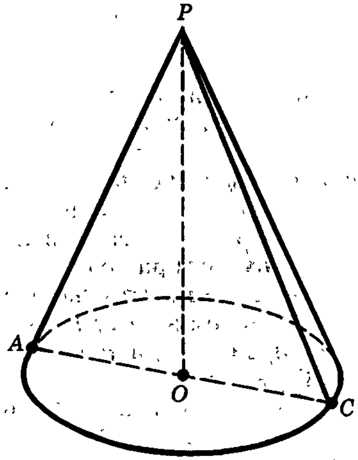


Рис. 222

сечением конуса вращения. Ясно, что конус вращения может быть получен вращением своего осевого сечения вокруг высоты.

Докажите, что плоскости, содержащие высоту конуса вращения, являются плоскостями симметрии этого конуса, а прямая, содержащая ось конуса вращения, является его осью симметрии.

Фигура, состоящая из образующих конуса вращения, которые соединяют его вершину с точками окружности основания, называется **боковой поверхностью** этого конуса. Она сама является конусом с той же вершиной, основанием ее служит окружность основания конуса вращения.

Поверхностью конуса вращения называется объединение его основания и его боковой поверхности. (Иногда поверхность конуса называют его полной поверхностью.)

19.2. Сечение конуса плоскостью, параллельной плоскости его основания

Теорема 19.1 *(о сечении конуса).*

Пусть плоскость пересекает конус и параллельна плоскости его основания. Сечение конуса такой плоскостью подобно основанию конуса. Коэффициент подобия равен отношению расстояния от вершины конуса до плоскости сечения к высоте конуса.

Доказательство. Пусть P — вершина конуса, F — его основание, F' — его сечение плоскостью α', параллельной плоскости основания α (рис. 223). Вершина P и основание F лежат по разные стороны от α', так как иначе она не пересекала бы конус.

Каждой точке $X \in F$ сопоставим точку X', в которой отрезок PX пересекает плоскость α'. Получим отображение основания F на сечение F'. Докажем, что это отображение является подобием, т. е. что при этом отображении все расстояния изменяются в одном и том же отношении.

Проведем высоту PO конуса, и пусть O' — точка, в которой высота PO пересекает плоскость α'.

Возьмем две точки X и Y основания F, и пусть X' и Y' — точки пересечения образующих PX и PY с плоскостью α'. Рассмотрим треугольники POX и $PO'X'$. Они подобны, так как отрезки OX и $O'X'$ параллельны (поскольку плоскость POX пересекает параллельные плоскости α и α' по параллельным прямым OX и $O'X'$). Поэтому

$$\frac{PO'}{PO}=\frac{PX'}{PX}. \tag{19.1}$$

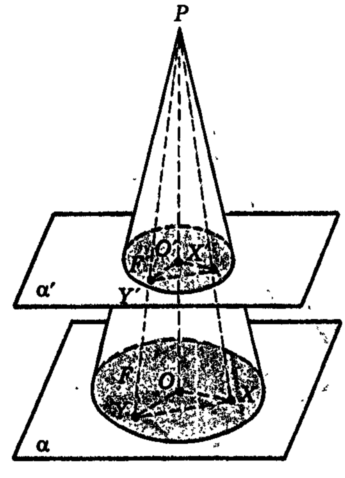


Рис. 223

Аналогично из подобия треугольников PXY и $PX'Y'$ имеем:

$$\frac{PX'}{PX}=\frac{X'Y'}{XY}. \tag{19.2}$$

Из (19.1) и (19.2) вытекает, что

$$\frac{X'Y'}{XY}=\frac{PO'}{PO}.$$

Так как это установлено для любых точек X и Y основания F, то фигуры F' и F подобны с коэффициентом подобия $k=\frac{PO'}{PO}$. ■

19.3*. Выпуклые конусы

Теорема 19.2.

Конус является выпуклым тогда и только тогда, когда его основание выпукло.

Доказательство этой теоремы вполне аналогично доказательству теоремы о выпуклом цилиндре. Поэтому мы его лишь иллюстрируем рисунком 224. Докажите теорему самостоятельно.

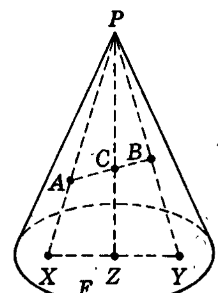


Рис. 224

19.4. Усеченный конус

Усеченный конус можно получить, если отсечь от конуса меньший конус плоскостью, параллельной плоскости основания (рис. 225). Точнее:

Усеченным конусом называется пересечение конуса с полупространством, содержащим основание конуса и ограниченным плоскостью, которая параллельна плоскости основания конуса и пересекает данный конус.

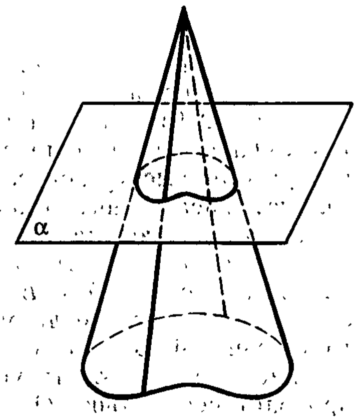


Рис. 225

Усеченный конус имеет два основания: нижнее — основание исходного конуса и верхнее — основание отсекаемого конуса; оно является сечением исходного конуса плоскостью, параллельной плоскости основания. Поэтому из теоремы о сечении конуса следует, что ***основания усеченного конуса подобны друг другу***.

Высотой усеченного конуса называется перпендикуляр, опущенный из любой точки одного из его оснований на плоскость другого основания (рис. 226). Высотой называют также длину этого перпендикуляра. Все такие перпендикуляры равны. (Чаще высоту опускают из точек меньшего основания на плоскость большего основания.)

Усеченный конус вращения получается из конуса вращения. Оба его основания — круги (рис. 227). Боковая поверхность усеченного конуса вращения — это принадлежащая ему часть боковой поверхности исходного конуса вращения.

Поверхность усеченного конуса вращения — это объединение его оснований и боковой поверхности. (Иногда поверхность усеченного конуса вращения называют его полной поверхностью.)

Отрезок, соединяющий центры оснований усеченного конуса вращения, является его высотой (рис. 228). (Докажите!) Выпуклый усеченный конус получается из выпуклого конуса.

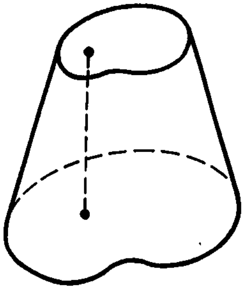


Рис. 226

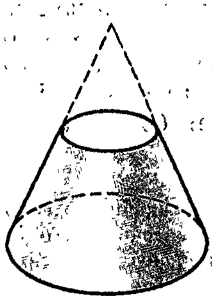


Рис. 227

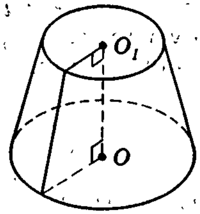


Рис. 228

19.5. Изображения конусов и усеченных конусов вращения

Прямой круговой конус рисуют так. Сначала рисуют эллипс, изображающий окружность основания (рис. 229). Затем находят центр основания — точку O и вертикально проводят отрезок PO, который изображает высоту конуса. Из точки P проводят к эллипсу касательные (опорные) прямые (практически это делают на глаз, прикладывая линейку) и выделяют отрезки PA и PB этих прямых от точки P до точек касания A и B. Обратите внимание, что отрезок AB — это не диаметр основания конуса, а треугольник APB — не осевое сечение конуса. Осевое сечение конуса — это треугольник APC: отрезок AC проходит через точку O. Невидимые линии рисуют штрихами; отрезок OP часто не рисуют, а лишь мысленно намечают, чтобы изобразить вершину конуса P прямо над центром основания — точкой O.

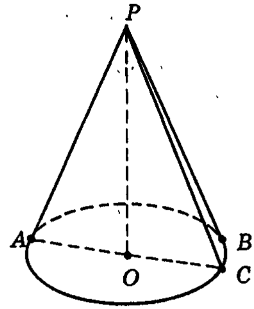


Рис. 229

Изображая усеченный конус вращения, удобно нарисовать сначала тот конус, из которого получается усеченный конус (рис. 230).

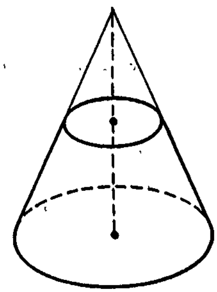


Рис. 230

Дополнение к параграфу 19

I. Центральное проектирование[1]

В курсах геометрии для изображения на плоскости чертежа или рисунка пространственных фигур применяется параллельное проектирование. Но в живописи, архитектуре и при фотографировании используется другой вид проектирования на плоскость — центральное проектирование. Его свойства сложнее свойств параллельного проектирования, но оно дает большую наглядность изображению.

Центральное проектирование на плоскость определяется так. В пространстве фиксируется некоторая точка O *(центр проектирования)* и плоскость α *(плоскость проекций)*, не проходящая через O. Через любую точку X проводится прямая OX — проектирующая прямая.

---

[1] Конечно, о центральном проектировании можно было бы рассказать уже после § 10, но мы рассматриваем его здесь, так как имеется сходство в определениях конусов и центрального проектирования — в них участвуют отрезки, идущие из одной точки, и прямые, проходящие через одну точку.

Если прямая OX пересекает α, то точка X' их пересечения называется *центральной проекцией точки X на плоскость α из точки O* (рис. 231).

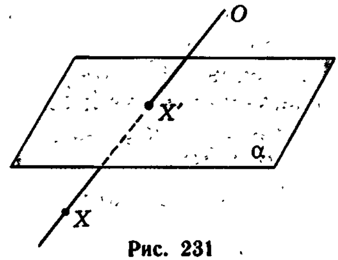


Рис. 231

Из данного определения следует, что не каждая точка пространства проектируется из центра O в некоторую точку плоскости α: если прямая OX параллельна α, то точки X' нет (в то время как при параллельном проектировании все точки имеют проекции).

Центральное проектирование не сохраняет параллельности прямых (рис. 232, вспомните, что, когда мы смотрим вдаль на параллельные рельсы, нам кажется, что они пересекаются на линии горизонта).

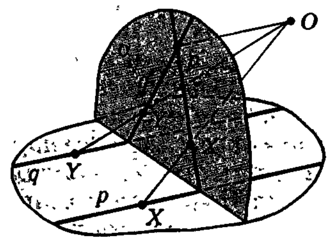


Рис. 232

Легко понять, что и отношение длин отрезков, лежащих на одной прямой, не параллельной плоскости проекций, не сохраняется при центральном проектировании (рис. 233).

Изображение пространственных фигур на плоскости с помощью центрального проектирования называется **перспективой**. Теория перспективы возникла из потребностей архитектуры и живописи. Некоторые законы перспективы были известны еще древнегреческим геометрам: Аполлонию Пергскому (III в. до н. э.), Менелаю (I в.), Паппу (III в.).

Теорией перспективы занимались крупнейшие художники эпохи Возрождения — Леонардо да Винчи (1452—1519) и Альбрехт Дюрер (1471—1528).

В дальнейшем теория перспективы развилась в один из разделов современной геометрии — **проективную геометрию** — учение о свойствах фигур, сохраняющихся при центральном проектировании.

Основы ее заложил французский математик Жерар Дезарг (1591—1661). Он ввел так называемые **бесконечно удаленные элементы**. Дезарг считал, что все параллельные друг другу прямые пересекаются в одной **бесконечно удаленной точке**, а все бесконечно удаленные точки одной плоскости лежат на одной **бесконечно удаленной прямой.**

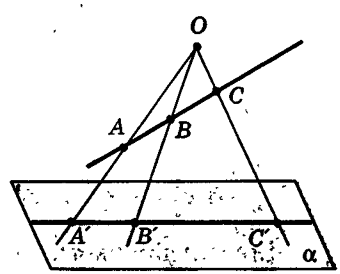


Рис. 233

Окончательно проективная геометрия оформилась как самостоятельная область геометрии в работах французского геометра Жана Виктора Понселе (1788—1867)[1].

---

[1] Ж. В. Понселе был офицером наполеоновской армии и свой основной труд «Трактат о проективных свойствах фигур», вышедший в 1822 г., написал в 1813—1814 гг. в Саратове, находясь в русском плену.

Некоторое представление о результатах и методах проективной геометрии дает одна из самых красивых (и основных) ее теорем, доказанная Дезаргом. Если использовать понятия бесконечно удаленных точек и прямых, то теорема Дезарга формулируется достаточно кратко.

Теорема Дезарга.

Если прямые, соединяющие соответствующие вершины двух данных треугольников, проходят через одну точку, то прямые, на которых лежат соответственные стороны этих треугольников, пересекаются в трех точках, лежащих на одной прямой.

Если же не использовать бесконечно удаленные элементы, то теорема Дезарга распадается на следующие утверждения:

Если прямые, соединяющие соответствующие вершины двух данных треугольников, проходят через одну точку или параллельны, то либо прямые, на которых лежат соответственные стороны этих треугольников, пересекаются в трех точках, лежащих на одной прямой, либо эти прямые попарно параллельны друг другу, либо две пары этих прямых пересекаются, а третья пара параллельна прямой, проходящей через точки пересечения первых двух пар.

Если сравнить эти две формулировки — проективную и «евклидову», то становится ясным преимущество первой из них.

Докажем теорему Дезарга в общем случае. Особые случаи попробуйте рассмотреть самостоятельно, используя общий случай.

Доказательство. Пусть даны треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ и прямые A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 проходят через точку O. Для случая, когда эти треугольники лежат в разных плоскостях α_1 и α_2 (рис. 234), доказательство теоремы Дезарга совсем просто. В этом случае прямые A_1B_1 и A_2B_2 лежат в плоскости OA_1B_1. Аналогично прямые A_1C_1 и A_2C_2 лежат в плоскости OA_1C_1, а прямые B_1C_1 и B_2C_2 — в плоскости OB_1C_1. Если $\alpha_1 \| \alpha_2$, то $A_1B_1 \| A_2B_2$, $A_1C_1 \| A_2C_2$ и $B_1C_1 \| B_2C_2$ (рис. 235). Если же α_1 и α_2 пересекаются по прямой a, то точки A_0, B_0, C_0 пересечения прямых B_1C_1 и B_2C_2, A_1C_1 и A_2C_2, A_1B_1 и A_2B_2 лежат на этой прямой.

Для случая, когда оба треугольника $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ лежат на одной плоскости (обозначим ее через α, рис. 236), доказательство сложнее.

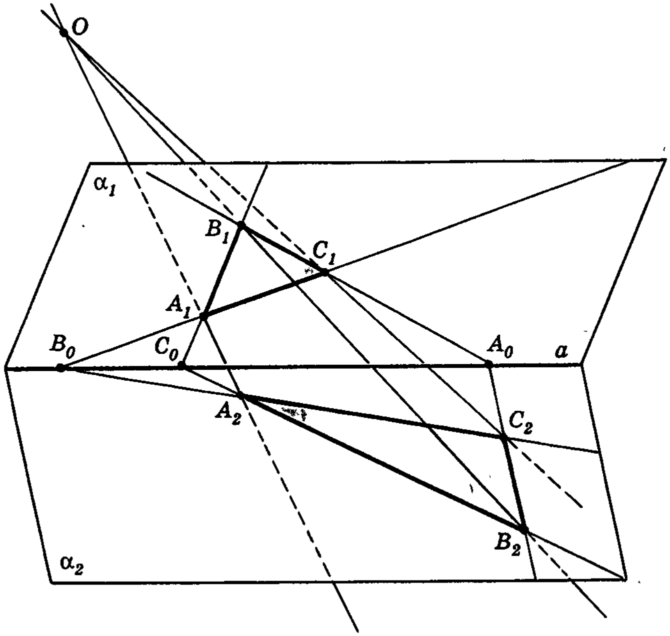


Рис. 234

Проведем через точку O прямую l, пересекающую плоскость α, и возьмем на l любые две точки O_1 и O_2, отличные от O (рис. 237). Прямые O_1A_1 и O_2A_2 лежат в плоскости, которая проходит через прямые A_1A_2 и O_1O_2, пересекающиеся в точке O. Пусть A — точка пересечения прямых O_1A_1 и O_2A_2 (если они окажутся параллельны, то сместим одну из точек O_1 или O_2 по прямой l так, чтобы эти прямые пересеклись). Точно так же построим точку B пересечения прямых O_1B_1 и O_2B_2 и точку C пересечения прямых O_1C_1 и O_2C_2. Получим треугольник ABC, который в паре с треугольником $A_1B_1C_1$ и в паре с треугольником $A_2B_2C_2$ удовлетворяет условию теоремы Дезарга. При этом треугольник ABC лежит в плоскости, отличной от плоскости α. Обозначим ее β.

Как уже доказано, прямая AB пересекает прямую A_1B_1 в некоторой точке C_0, лежащей на прямой пересечения плоскостей α и β (обозначим эту прямую через a). Но через ту же точку C_0 проходит и прямая A_2B_2, т. е. прямые A_1B_1 и A_2B_2 пересекаются в точке $C_0 \in a$. Аналогично доказывается, что прямые A_1C_1 и A_2C_2 пересекаются в точке $B_0 \in a$ и прямые B_1C_1 и B_2C_2 пересекаются в точке $A_0 \in a$. Итак, все три точки A_0, B_0, C_0 лежат на одной прямой a. ■

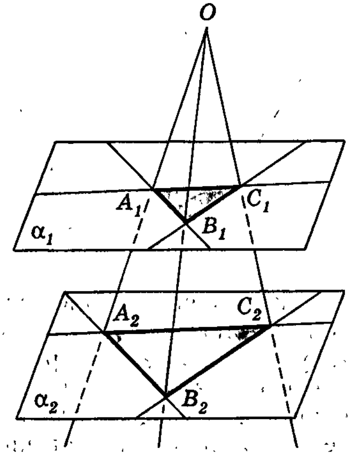


Рис. 235

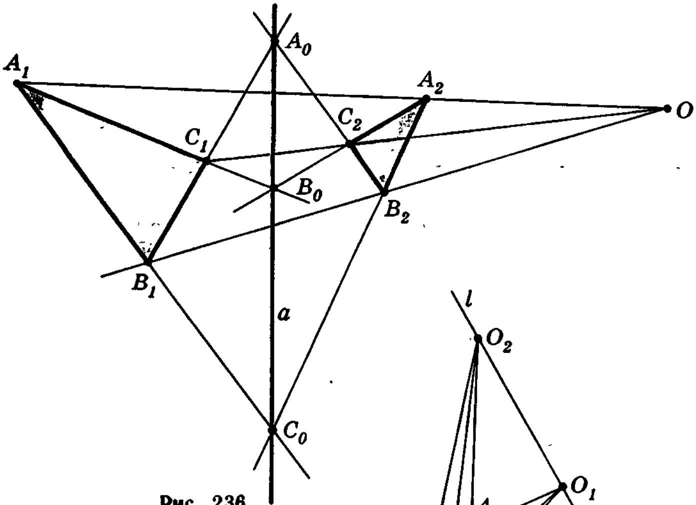


Рис. 236

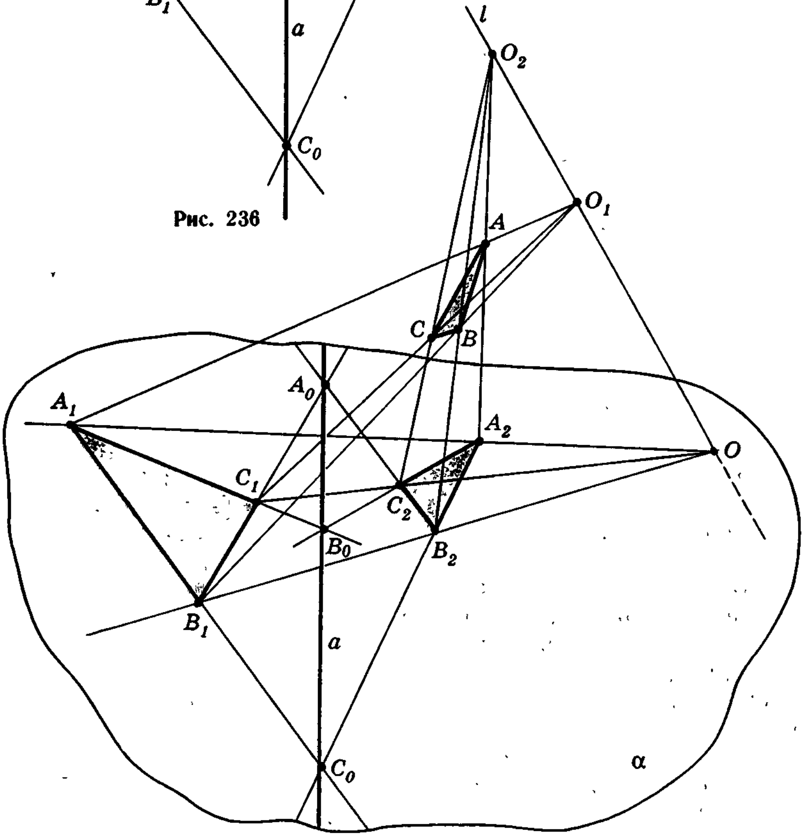


Рис. 237

Оказывается, что верна и теорема, обратная теореме Дезарга (сформулируйте ее). Для случая, когда треугольники лежат в разных плоскостях, она снова почти очевидна, а для случая, когда эти треугольники лежат в одной плоскости, попробуйте доказать ее с помощью аналогичного дополнительного построения.

II. Конические сечения

Мы уже показали в дополнении к § 18, что боковую поверхность цилиндра вращения плоскость пересекает по эллипсу. Так же и сечение боковой поверхности конуса вращения плоскостью, не пересекающей его основания, является эллипсом (рис. 238). Доказать это можно так. Сначала аналогично тому, как было доказано в случае сечения цилиндра, доказывается, что сумма расстояний от любой точки сечения до двух точек (фокусов) есть величина постоянная. Как проводится доказательство, видно на рисунке 239 ($XF_1+XF_2=XY_1+XY_2=M_1M_2=2a$, сравните с рисунком 215 и доказательством, проведенным для цилиндра). А как показано в дополнении к § 18, фигура, обладающая этим свойством, является эллипсом, т. е. рассматриваемое сечение конуса — эллипс. Поэтому эллипс называется **коническим сечением.**

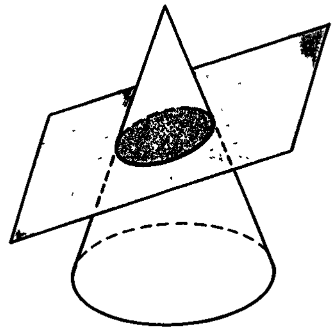


Рис. 238

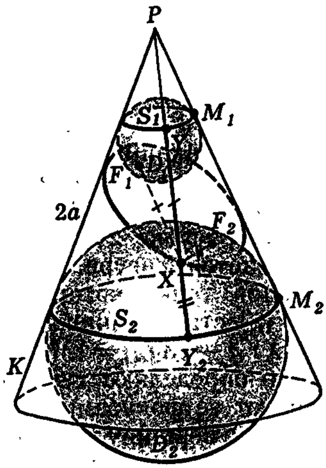


Рис. 239

Но к коническим сечениям относятся и другие хорошо известные кривые — гиперболы и параболы. Рассмотрим неограниченный конус, получающийся при продолжении боковой поверхности конуса вращения, т. е. такой конус K, образующие которого — лучи и который является поверхностью (рис. 240). Пересечем его плоскостью α, не проходящей через вершину. Если плоскость α пересекает все образующие конуса, то в сечении, как уже говорилось, получаем эллипс (рис. 238).

Поворачивая плоскость α, можно добиться того, чтобы она пересекала все образующие конуса K, кроме одной (которой α параллельна). Тогда в сечении получим параболу (рис. 241).

Наконец, вращая плоскость α дальше, переведем ее в такое положение, что α, пересекая часть образующих конуса K, не пересекает уже бесконечное множество других его образующих (и параллельна двум из них, рис. 242), тогда в сечении конуса K с плоскостью α получаем кривую, называемую гиперболой (точнее, одну ее «ветвь»). Та гипербола, которая является графиком функции $y=\frac{k}{x}$, является лишь частным случаем гиперболы — равнобочной гиперболой, подобно тому как окружность является частным случаем эллипса. Любые гиперболы можно получить из равнобочных с помощью параллельного проектирования, так же как эллипс получается параллельным проектированием окружности.

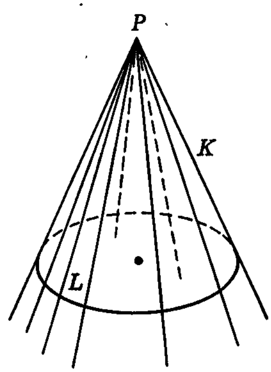


Рис. 240

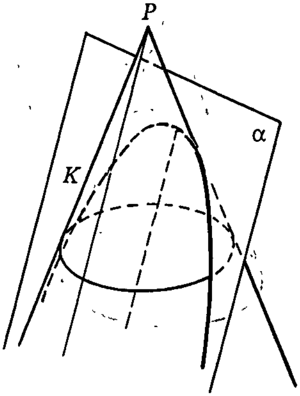


Рис. 241

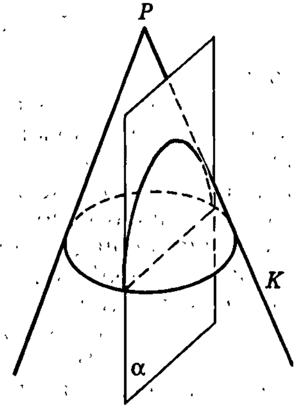


Рис. 242

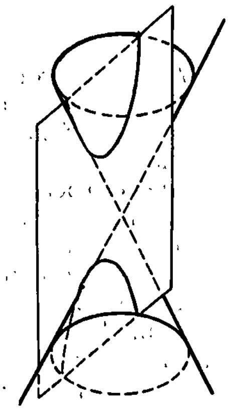


Рис. 243

Чтобы получить обе ветви гиперболы, надо взять сечение конуса, образованного не лучами, а прямыми, содержащими образующие боковой поверхности конуса вращения, т. е. конуса, имеющего две «полости» (рис. 243).

На рисунке 244 показано, что в таком сечении получается фигура, модуль разности расстояний от каждой точки которой до двух данных точек F_1 и F_2 есть величина постоянная ($|XF_1|-|XF_2|=$ $=|XY_1|-|XY_2|=|M_1M_2|=2a$). Именно так чаще всего определяют гиперболу, а заданные точки называют ее фокусами.

Если вершину такого конуса взять за центр проектирования, то легко убедиться, что все конические сечения — эллипсы, гиперболы, параболы — можно получить из окружности (а также друг из друга) с помощью центрального проектирования.

Имеется ряд важных свойств, объединяющих в один класс эллипсы, гиперболы и параболы. Напри-

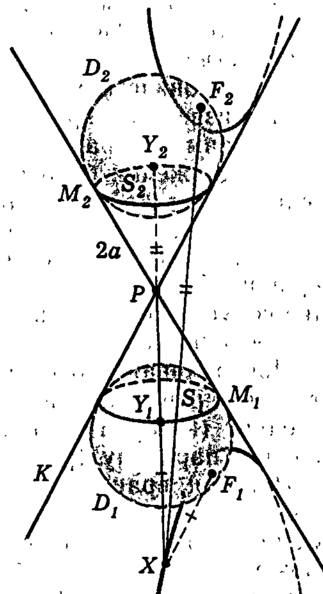


Рис. 244

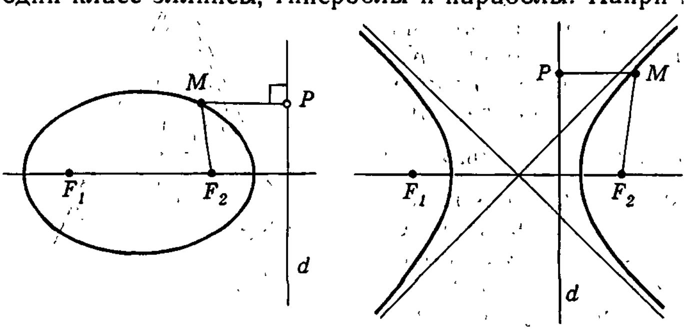


Рис. 245

мер, ими исчерпываются «невырожденные», т. е. не сводящиеся к точке, прямой или паре прямых, кривые, которые задаются на плоскости в декартовых координатах уравнением вида

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0.$$

Отметим также, что эллипс, гипербола и парабола могут быть определены как множества точек на плоскости, отношение расстояний от которых до данной точки (называемой фокусом) и данной прямой есть величина постоянная.

Если это отношение меньше 1, то получаем эллипс $\left(\frac{MF_2}{MP}=\varepsilon<1\right)$; если оно больше единицы, то получаем гиперболу $\left(\frac{MF_2}{MP}=\varepsilon>1\right)$ (рис. 245); если оно равно единице, то имеем параболу $\left(\frac{MF}{MP}=1\right)$ (рис. 246).

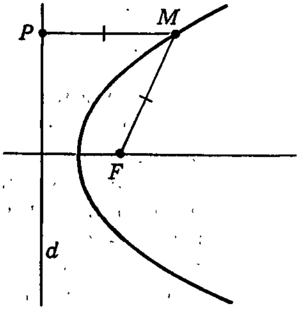


Рис. 246

Конические сечения изучали еще древнегреческие геометры, и их теория была одной из вершин античной геометрии. Наиболее полное исследование конических сечений в древности было проведено Аполлонием Пергским.

Конические сечения играют важную роль в природе: например, по эллиптическим, параболическим и гиперболическим орбитам движутся тела в поле тяготения (вспомните законы Кеплера). Замечательные свойства конических сечений часто используются в науке и технике, например, при изготовлении некоторых оптических приборов или прожекторов (поверхность зеркала в прожекторе получается вращением дуги параболы вокруг оси параболы). Конические сечения можно наблюдать как границы тени от круглых абажуров.

Задачи

В задачах слово «конус» везде означает «конус вращения», если нет специальных оговорок. Под образующей конуса понимается образующая его поверхности. Это же имеется в виду и для усеченного конуса.

Разбираемся в решении

19.1. Через середину высоты усеченного конуса провели сечение, параллельное основанию. Были высказаны два предположения: 1) площадь сечения равна среднему арифметическому площадей оснований; 2) площадь сечения равна среднему геометрическому площадей оснований. Верно ли какое-либо из них?

Решение.

Прежде всего заметим, что первое предположение выглядит похожим на истину. В планиметрии есть нечто подобное — теорема о средней линии трапеции.

Ответ на вопрос задачи можно получить непосредственным вычислением площади такого сечения (?). Но мы будем действовать иначе.

При решении достаточно сложной задачи обычно возникают разные предположения. Прежде чем их начать доказывать, полезно убедиться в том, что это стоит делать. Для этого можно привести примеры, в которых это предположение верно, но можно поискать и контрпримеры, в которых оно неверно, тогда и доказывать нет смысла.

Примером или контрпримером часто бывают предельные случаи для ситуации, описанной в задаче.

В нашей задаче возьмем в качестве такого предельного случая конус, который получается из данного усеченного конуса, когда площадь одного основания равна нулю. Тогда согласно предположению площадь сечения равна половине площади другого основания. Но это неверно (?). Значит, для нашего предположения найден контрпример, и доказывать его нет смысла. Этот контрпример опровергает второе предположение.

Дополняем теорию

19.2. Через образующую конуса, лежащую на его поверхности, проведена плоскость, опорная к нему. Докажите, что она: а) проходит через прямую, опорную к его основанию; б) перпендикулярна осевому сечению конуса, проходящему через ту же образующую. Сформулируйте и проверьте обратные утверждения. Укажите способ построения плоскости, опорной к конусу и проходящей через образующую на его поверхности.

19.3. Два конуса имеют общую вершину и ровно одну общую образующую. Докажите, что: а) их общая вершина, общая точка их оснований и центры оснований лежат в одной плоскости; б) через их общую образующую проходит их общая опорная плоскость; в) их основания имеют общую опорную прямую.

19.4. Докажите, что около конуса можно описать сферу. Это означает, что найдется сфера, на которой лежат вершина конуса и окружность его основания. **Конус** в таком случае **называется вписанным в сферу, а сфера — описанной около конуса.** Сформулируйте аналогичное утверждение для усеченного конуса и сферы. Верно ли оно?

19.5. Докажите, что в конус можно вписать сферу. Это означает, что найдется сфера, которая содержится в конусе, касается его основания, а с боковой поверхностью конуса имеет общую окружность. **Конус** в этом случае **называется описанным около сферы, а сфера — вписанной в конус.** Верно ли аналогичное утверждение для усеченного конуса и сферы?

19.6. Дан усеченный конус. Установите зависимость между радиусами, его образующей и высотой.

Рисуем

19.7. В этой задаче под конусом понимается конус общего вида. Нарисуйте два конуса так, чтобы оказалось конусом: а) их пересечение и объединение; б) только их пересечение.

19.8. Нарисуйте возможные проекции конуса и усеченного конуса.

Представляем

19.9. Абажур от настольной лампы является боковой поверхностью усеченного конуса. Какой фигурой является тень от абажура на стене?

Планируем

19.10. Через вершину конуса проводятся сечения под одним и тем же углом к плоскости основания. а) Докажите, что эти сечения равны. б) Сформулируйте и проверьте обратное утверждение. в) Пусть известен угол в осевом сечении конуса (при вершине конуса) и угол, который данное сечение составляет с плоскостью основания. Как найти величину угла между образующими конуса на его поверхности, принадлежащими сечению?

19.11. Как найти расстояние между двумя точками на поверхности данного конуса, если измерения можно проводить только на его поверхности?

Находим величину

19.12. В конусе проведено сечение, параллельное основанию, с площадью, в два раза меньшей площади основания. В каком отношении оно делит высоту конуса?

19.13. В конусе радиусом R и высотой H проведены два сечения, параллельные основанию. Их площади S_1 и S_2. Найдите расстояние между ними. Решите аналогичную задачу для усеченного конуса.

19.14. В конусе с радиусом R и высотой H проводятся сечения: а) параллельные основанию; б) через вершину. Выразите как $f(x)$ площади этих сечений, где x — расстояние от центра основания конуса до этих сечений.

19.15. Основание данного конуса совпадает с меньшим основанием данного усеченного конуса, а других общих точек эти фигуры не имеют. Эту фигуру пересекает плоскость, параллельная основанию. Выразите площадь сечения как функцию расстояния между сечением и большим основанием усеченного конуса.

19.16. В данном усеченном конусе со стороны меньшего основания сделали по центру углубление в виде усеченного конуса, размеры которого также известны. Эту фигуру пересекают плоскостью, параллельной плоскости основания данного конуса. Выберите какую-либо переменную и выразите через нее площадь сечения этой фигуры.

Ищем границы

19.17. Дан конус радиусом R и образующей L. Через вершину проводится сечение. В каких границах лежит его площадь?

19.18. Из одной точки выходят три равных отрезка, не лежащие в одной плоскости. Докажите, что существует конус, боковая поверхность которого проходит через эти три отрезка.

Доказываем

19.19. Два конуса имеют ровно одну общую точку — вершину каждого. Докажите, что существует плоскость, которая разделяет эти конусы, т. е. проходит так, что конусы лежат с разных сторон от нее. Обобщите это утверждение.

Исследуем

19.20. В каждом ли конусе существует сечение, параллельное основанию, площадь которого равна площади осевого сечения?

19.21. Угол при вершине осевого сечения конуса равен φ. Угол между двумя образующими на поверхности конуса равен φ_1. Через эти образующие проводятся опорные плоскости к этому конусу. Можете ли вы найти, чему равен угол: а) между этими плоскостями; б) между прямой их пересечения и плоскостью основания конуса?

19.22. Две плоскости перпендикулярны. Конус с углом φ при вершине осевого сечения расположен так, что его вершина лежит на прямой пересечения этих плоскостей, а сами плоскости являются опорными к конусу. При каком угле φ это возможно? Решите эту же задачу в случае, когда данные плоскости не являются перпендикулярными.

Переключаемся

19.23. Вершина конуса недоступна. Как найти его высоту, если можно делать измерения только на его поверхности?

Прикладная геометрия

19.24. Основание конуса находится на земле. Сможете ли вы установить размеры конуса, не подходя к нему?

19.25. В землю воткнута вертикальная палочка. Какую линию описывает на земле тень от ее верхнего конца в течение дня?

19.26. Закрепив вершину, данный конус покатили по плоскости. Какая фигура получится от движения его оси? Какой путь проделает центр основания конуса за один оборот конуса? Может ли конус вернуться в прежнее положение за целое число оборотов?

Участвуем в олимпиаде

19.27. Прямая имеет с боковой поверхностью конуса больше двух общих точек. Докажите, что она проходит через его образующую.

§ 20. Тела

20.1. Наглядное представление о теле

Основной предмет геометрии в пространстве составляют геометрические тела, как говорят короче — «тела», а также их поверхности.

Мы уже рассмотрели некоторые простейшие тела: шары, цилиндры, конусы и усеченные конусы вращения. Теперь вопрос состоит в том, чтобы дать общее определение геометрического тела.

По первоначальному представлению и понятию геометрическое тело — это любое реальное физическое тело, только рассматриваемое в отвлечении от всех его свойств, кроме пространственной протяженности, т. е. геометрическим телом называется часть пространства, занимаемая физическим телом (рис. 247). Полезно понимать, что хотя мы занимаемся в геометрии в первую очередь самыми простыми телами, но в принципе любое реальное тело, какую бы сложную форму оно ни имело, может рассматриваться (в соответствующем отвлечении и, конечно, приближенно) как тело геометрическое.

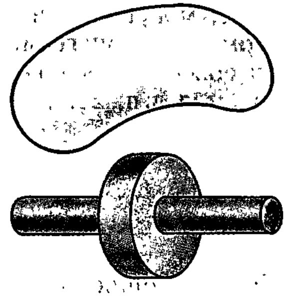


Рис. 247

По наглядному представлению всякое тело имеет внутренние точки, отделенные от остального пространства поверхностью, или, как еще говорят, границей тела. Так, внутренность шара отделена от остального пространства сферой, а внутренности цилиндров и конусов вращения — их (полными) поверхностями.

Кроме того, множество внутренних точек тела не должно распадаться на отдельные куски, т. е. требуется, чтобы любую внутреннюю точку тела можно было соединить внутри тела с любой другой его внутренней точкой ломаной линией или отрезком. Поэтому фигура, состоящая из объединения двух шаров, не имеющих общих точек, телом не считается. Точно так же фигура (рис. 248), состоящая из объединения двух кубов, имеющих только общую вершину (или общее ребро), телом не считается (в ней нельзя соединить внутреннюю точку одного куба с внутренней точкой другого куба ломаной, не проходящей через граничную точку этой фигуры).

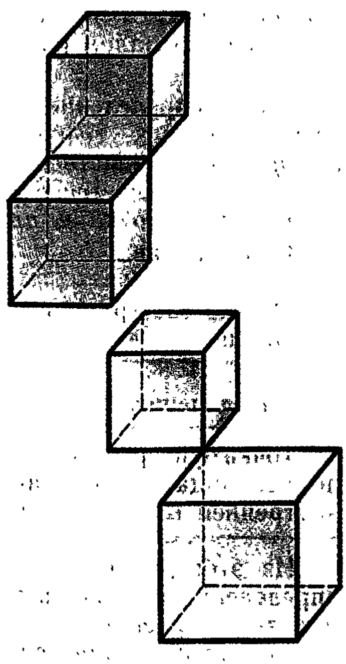


Рис. 248

Наконец, всякое тело содержит все свои граничные точки — всю свою границу (поверхность). При этом поверхность тела служит также границей его внутренности, т. е. поверхность сплошь прилегает к внутренности и не имеет «отростков». Поэтому конус со шпилем или с полями, как у шляпы, не считается телом (рис. 249).

Можно представить себе тело в виде помидора или картошки, кожура — это поверхность; наглядным образом «отростков», которых не должно быть на теле, могут служить иголки у хвойного дерева. Словом, в понятии геометрического тела выражаются наши обычные представления. Точное его определение дается в п. 20.3.

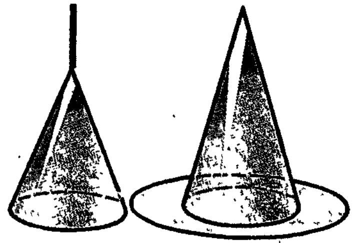


Рис. 249

20.2. Граница и внутренность фигуры в пространстве

Дадим общие определения границы и внутренности любой фигуры как в пространстве, так и на плоскости.

Определение.

Точка называется граничной для данной фигуры, если сколь угодно близко от нее есть точки, как принадлежащие фигуре, так и не принадлежащие ей. (Выражение «сколь угодно близко» означает «на сколь угодно малом расстоянии», рис. 250.)

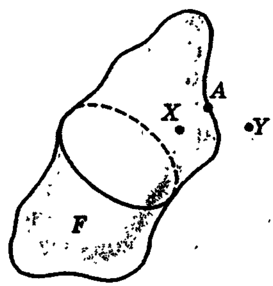


Рис. 250

Это же определение граничной точки можно сформулировать так: *точка называется граничной для фигуры в пространстве, если в любом шаре с центром в этой точке имеется (найдется) как точка данной фигуры, так и точка, не принадлежащая этой фигуре.*

Определение.

Множество граничных точек фигуры называется ее границей.

Определение.

Точка фигуры, не лежащая на ее границе, т. е. не являющаяся ее граничной точкой, называется внутренней точкой фигуры.

Из этого определения и второй формулировки определения граничной точки следует, что *внутренняя точка фигуры в пространстве — это такая ее точка, которая является центром некоторого шара, содержащегося в данной фигуре.*

Определение.

Множество внутренних точек фигуры называется ее внутренностью.

Эти определения повторяют в общем виде то, что уже говорилось, в частности о внутренности и границе (или поверхности) шара, и вполне отвечают обычным представлениям: внутри — это значит не на границе, не на поверхности. О точках пространства, которые не лежат ни внутри, ни на границе фигуры, говорят, что они лежат вне фигуры или являются ее внешними точками.

Замечание 1. Для фигур общего вида не говорят об их поверхности, потому что их граница может слишком мало походить на то, как мы представляем себе поверхность.

Замечание 2. Надо понимать, что граничные точки фигуры могут ей и не принадлежать. Например, поверхность шара — сфера является границей не только самого шара, но и его внутренности; все точки сферы — граничные для внутренности шара, но не принадлежат ей. Напротив, внутренние точки фигуры по определению принадлежат ей. Но фигура может и не иметь внутренности, как не имеет ее, например, плоскость или сфера.

Замечание 3. Если некоторая точка A принадлежит фигуре F, то, определяя, является ли точка A граничной точкой фигуры F или нет, достаточно выяснить, есть ли сколь угодно близко к A точки, не принадлежащие F, так как сколь угодно близко к A точки, принадлежащие F, заведомо есть — это сама точка A.

Определение.

Фигура, содержащая все свои граничные точки (т. е. свою границу), называется замкнутой.

20.3. Определение тела

Дадим теперь точное определение тела. Оно кратко повторяет то, что было сказано в п. 20.1 о свойствах внутренности и границы тела, выделяющих тела из всех пространственных фигур.

Определение.

Телом называется фигура в пространстве, обладающая двумя свойствами:

1) у нее есть внутренние точки, и любые две из них можно соединить ломаной (или отрезком), которая целиком проходит внутри фигуры, т.е. состоит из внутренних точек;

2) фигура содержит свою границу, и ее граница совпадает с границей ее внутренности.

Граница тела называется его **поверхностью.**

Проверьте самостоятельно, что, как уже говорилось, шар, а также цилиндры, конусы и усеченные конусы вращения являются телами. Вспомните при этом, что, говоря о шаре в п. 15.1, мы уже определили его внутренность и поверхность. Но совпадают ли определенные там внутренность и поверхность шара с его внутренностью и поверхностью, которые он имеет согласно общему определению, данному в этом параграфе? Докажите, что совпадают.

Из тел вообще выделяются выпуклые тела и многогранники. О выпуклых телах речь пойдет в дополнении к этому параграфу, а о многогранниках — в главе V.

Поверхность ограниченного выпуклого тела называется **замкнутой выпуклой поверхностью.**

20.4. Граничные и внутренние точки плоских фигур. Замкнутая область

Плоские фигуры, имеющие свойства, аналогичные свойствам тел в пространстве, называются замкнутыми областями. Определение замкнутой области дословно повторяет определение тела с той лишь разницей, что фигуры рассматриваются не в пространстве, а на плоскости.

Определению тела предшествовали определения внутренних и граничных точек фигур в пространстве. Для фигур в плоскости эти определения в первоначальных своих формулировках совпадают с теми, что даны для пространства. А во вторых формулировках этих определений шар должен быть заменен кругом. Например, точка называется граничной для фигуры в некоторой плоскости, если в любом круге с центром в этой точке найдутся как точки данной фигуры, так и точки, не принадлежащие этой фигуре (рис. 251).

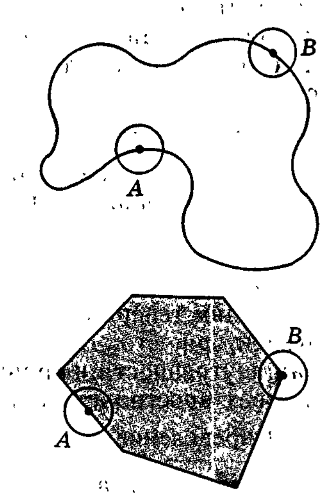


Рис. 251

Из этих определений вытекает, что границей полуплоскости является ее граничная прямая, границей круга является окружность и т. п. (рис. 252). Отрезок, а также ломаная на плоскости состоят только из граничных точек и потому совпадают со своей границей (рис. 253).

Замечание 1. Укажем на одно исключение: как и раньше, мы говорим, что точка лежит внутри отрезка, если она лежит между его концами, хотя отрезок на плоскости и не имеет внутренних точек.

Замечание 2. Обратим внимание на относительность понятий внутренних и граничных точек: все зависит от того, где они определяются. Так, на плоскости стороны квадрата образуют его границу, а остальные его точки внутренние. Если же квадрат рассматривать как фигуру в пространстве, например как грань куба, то он вовсе не имеет внутренних точек и весь содержится в границе куба. Вообще любая фигура, лежащая в некоторой плоскости, в пространстве внутренних точек не имеет; она состоит лишь из граничных точек, так как сколь угодно близко от любой точки этой фигуры есть точки, ей не принадлежащие (среди точек, которые не лежат в плоскости данной фигуры).

Поэтому в дальнейшем, говоря о внутренних и граничных точках плоских фигур, мы всегда имеем в виду, что они определяются относительно плоскости данной фигуры.

Определение.

Замкнутой областью называется фигура на плоскости, обладающая двумя свойствами:

1) у нее есть внутренние точки, и любые две из них можно соединить ломаной (или отрезком), которая целиком лежит внутри фигуры;

2) фигура содержит свою границу, и ее граница совпадает с границей ее внутренности.

Понятие замкнутой области позволяет нам теперь сформулировать условия, определяющие, когда цилиндры и конусы являются телами.

Цилиндр является телом тогда и только тогда, когда его основанием является замкнутая область.

Конус является телом тогда и только тогда, когда его основанием является ограниченная замкнутая область.

Попробуйте доказать эти утверждения самостоятельно и укажите, какие точки составляют поверхность и внутренность таких цилиндров и конусов.

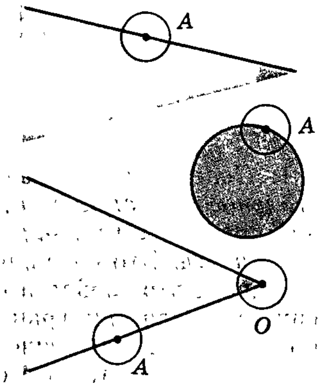


Рис. 252

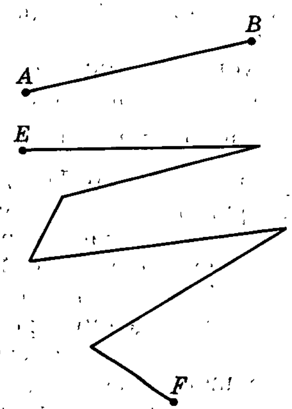


Рис. 253

Дополнение к параграфу 20

I. Свойства границы

1. *Поверхность отделяет внутренность тела от остального пространства, так что нельзя непрерывным путем выйти изнутри тела, не пересекая его поверхности.* Это очевидно (рис. 254).

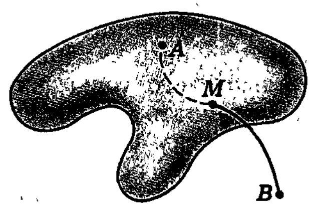


Рис. 254

Однако это свойство не включено явно в определение ни тела, ни границы. Его можно доказать, определив сначала точно, что значит «выйти непрерывным путем». Мы этого делать не будем (так как результат ясен, а строгое доказательство довольно длинно).

Докажем следующую теорему:

Теорема.

Всякая ломаная, соединяющая какую-либо внутреннюю точку фигуры с внешней, пересекает границу, т. е. имеет с нею хотя бы одну общую точку.

Доказательство. Пусть ломаная L соединяет точку фигуры F с точкой, не принадлежащей F. Если хотя бы одна из двух соединяемых точек граничная, мы уже имеем нужный результат. Поэтому рассмотрим случай, когда ломаная L соединяет внутреннюю точку фигуры F с ее внешней точкой. Если среди вершин ломаной есть граничная точка фигуры F, опять имеем требуемое. Если же такой точки нет, то найдется отрезок AB — звено ломаной L, один конец которого A лежит внутри F, а другой — B — вне F.

Пусть l — длина отрезка AB, выраженная в каких-либо единицах. Разделим отрезок AB на 10 равных частей, длина каждой из них будет $\frac{l}{10}$. Может случиться, что одна из точек деления лежит на границе фигуры F, так что она и будет искомой. Если же это не так, то среди отрезков, на которые разделили AB, найдется такой A_1B_1, что его конец A_1 лежит внутри F, а B_1 — вне F.

Тогда разделим отрезок A_1B_1 снова на 10 частей и либо найдем среди точек деления точку, лежащую на границе фигуры F, либо найдем отрезок A_2B_2 с концом A_2 внутри F и концом B_2 вне F. В последнем случае разделим отрезок A_2B_2 и т. д. В результате мы либо найдем, наконец, среди точек деления точку, лежащую на границе F, т. е. получим нужный результат, либо получим последовательность отрезков, вложенных один в другой:

$$AB \supset A_1B_1 \supset A_2B_2 \supset \dots \supset A_nB_n \supset \dots$$

Так как каждый раз мы делили отрезок на 10 частей, то длины отрезков AA_1, A_1A_2 и т. д. будут составлять сколько-то десятых, сотых и т. д. долей всей длины $|AB| = l$, т. е.

$$A_{n-1}A_n = \frac{k_n}{10^n} l,$$

и потому

$$|AA_n| = l\left(\frac{k_1}{10} + \frac{k_2}{10^2} + \dots + \frac{k_n}{10^n}\right).$$

При $n \to \infty$ получаем бесконечную десятичную дробь, т. е. некоторое число.

$$k = \frac{k_1}{10} + \frac{k_2}{10^2} + \dots = 0{,}k_1k_2\dots$$

По аксиоме планиметрии от точки A на луче AB можно отложить отрезок AC длиной $k \cdot l$. Точки A_n подходят сколь угодно близко к точке C, так же как и точки B_n. Точки A_n лежат внутри F, а B_n — вне F. Поэтому точка C будет граничной. ■

2. *Всякое тело обладает тем свойством, что для каждой точки вне тела есть ближайшая точка в теле.* Иначе говоря, среди отрезков, соединяющих данную внешнюю точку с точками тела, есть самый короткий (хотя бы один). Поэтому расстояние от точки до тела всегда определено.

Понятно, что точка тела, ближайшая к данной внешней точке, всегда лежит на поверхности (на границе) тела.

Используя понятие границы, можно дать общее определение расстояния от точки до любой фигуры.

Расстоянием от внешней точки до фигуры называется расстояние от этой точки до ближайшей точки на границе фигуры. Ближайшая точка на границе, как можно доказать, всегда есть. (Если же точка принадлежит фигуре или ее границе, то расстояние до фигуры равно нулю.)

II. Выпуклые тела

а) Свойства выпуклых тел

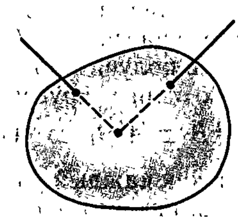


Рис. 255

Что такое выпуклое тело, ясно из названия: это тело, являющееся выпуклой фигурой, т. е. такое тело, что каждые две его точки соединимы в нем отрезком.

Выпуклые тела могут быть ограниченными и неограниченными, как, например, полупространство. Простоты ради будем рассматривать только ограниченные тела, т. е. всюду дальше слово «тело» будет означать ограниченное тело.

Мы расскажем здесь о некоторых интересных и важных свойствах выпуклых тел, но не будем доказывать формулируемых теорем, хотя некоторые из них доказываются довольно просто и вы сами могли бы их доказать.

Из определения выпуклого тела легко выводятся две теоремы, характеризующие выпуклые тела.

Теорема.

Тело является выпуклым тогда и только тогда, когда каждый луч, исходящий из любой его внутренней точки, пересекает поверхность тела в единственной точке.

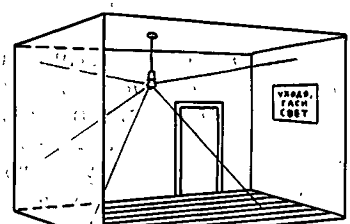


Рис. 256

Наглядная иллюстрация теоремы такова: *тело является выпуклым тогда и только тогда, когда из любой его внутренней точки можно видеть всю поверхность тела* (рис. 255).

Иначе говоря, тело — «помещение» выпукло тогда и только тогда, когда в нем нет «закоулков», т. е. всю его поверхность можно «осветить» из любой его точки (рис. 256).

Теорема.

Ограниченная фигура является выпуклым телом тогда и только тогда, когда у нее есть внутренние точки и каждая прямая, проходящая через внутреннюю точку, пересекает фигуру по отрезку (рис. 257).

(То, что граница принадлежит фигуре, гарантировано здесь тем, что каждый такой отрезок содержится в фигуре целиком, т. е. вместе с концами.)

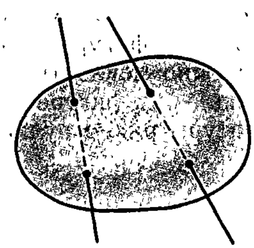


Рис. 257

Но, пожалуй, главной теоремой о выпуклых телах надо считать следующую:

Теорема.

Тело выпукло тогда и только тогда, когда через каждую точку его границы проходит опорная плоскость.

Как всегда, выражение «тогда и только тогда» означает, что верны два взаимно обратных утверждения:

1) *если тело выпукло, то через каждую точку его границы проходит опорная плоскость;*

2) *если у тела через каждую точку границы проходит опорная плоскость, то тело выпукло.*

Теорема означает, что среди всех тел любое выпуклое тело характеризуется тем, что его можно опереть, скажем, о плоскость стола любой точкой поверхности. Именно по такому свойству и судят о выпуклости предмета (рис. 258). Ясно, что для невыпуклого тела это невозможно: у него на поверхности всегда найдутся точки, к которым не прикоснуться плоским предметом (рис. 259). С предыдущей теоремой связана следующая

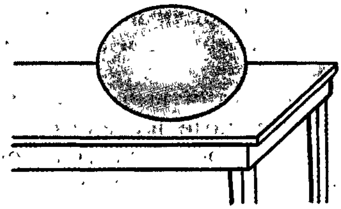


Рис. 258

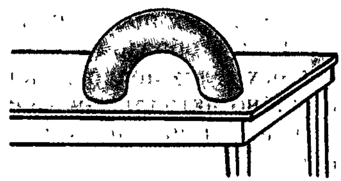


Рис. 259

Теорема.

Ограниченная фигура является выпуклым телом тогда и только тогда, когда она имеет внутренние точки и каждая не принадлежащая ей точка отделима от нее плоскостью, т. е. существует такая плоскость, что фигура и точка лежат по разные стороны от нее (рис. 260).

Поскольку любую точку, не принадлежащую выпуклому телу, можно отделить от него плоскостью, то, значит, проводя плоскости, отделяющие от тела внешние точки, получим само тело. Иначе говоря, выпуклое тело можно вырезать из окружающего пространства плоскими разрезами, для невыпуклого тела это сделать нельзя.

Следствие.

Выпуклое тело является пересечением полупространств. (Более того, выпуклое тело является пересечением полупространств, ограниченных его опорными плоскостями.)

И вместе с тем фигура с внутренними точками, являющаяся пересечением полупространств, представляет собой выпуклое тело.

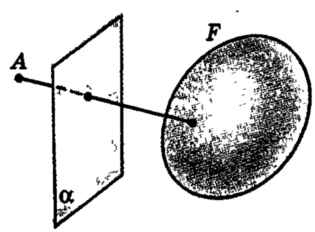


Рис. 260

б) О роли понятия выпуклости в современной математике и его применениях

Понятия выпуклого тела и опорной плоскости, обобщенные на многомерные пространства, приобрели в последние годы очень большое значение за пределами геометрии. Одними из важнейших задач математики и ее приложений в технике и экономике являются задачи о наибольших и наименьших значениях тех или иных величин, задачи оптимизации, т. е. нахождения наилучших по каким-либо признакам решений, когда желательные величины должны иметь наибольшие возможные значения, а нежелательные — наименьшие. Примером может служить вопрос о наилучшем использовании материала (с наименьшими отходами) или о наилучшем использовании наличных станков (с наибольшей производительностью).

Такого рода задачи приводятся к задачам о проведении опорных плоскостей к некоторым телам в многомерных пространствах.

Таким образом, наш наглядный рассказ о выпуклых телах подводит к самым современным и чрезвычайно актуальным задачам математики и ее приложений, в частности в вопросах оптимального планирования, оптимального управления и др.

Связь опорных прямых и плоскостей с задачами о наибольших и наименьших значениях понять очень просто.

Представим себе график какой-нибудь функции (рис. 261). Там, где функция достигает наибольшего (наименьшего) значения, там график имеет «горизонтальную» (параллельную оси x) опорную прямую. Совершенно так же поверхность в точке наибольшего удаления от данной плоскости имеет параллельную ей опорную плоскость (рис. 196).

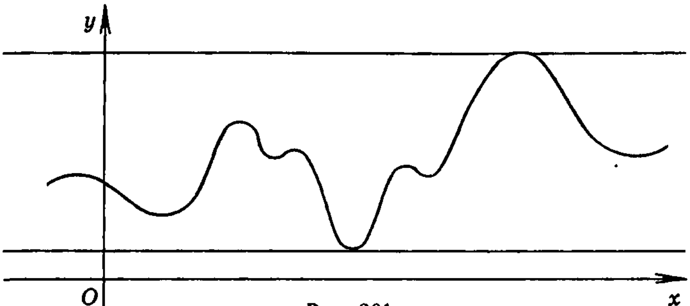


Рис. 261

в) Еще о шаре

Теория выпуклых тел насчитывает меньше ста лет. Она постоянно обогащается новыми результатами и идеями. Даже о шаре — одном из простейших выпуклых тел — недавно были доказаны интересные теоремы. Приведем примеры.

Мы доказывали (теорема 15.2), что опорная плоскость шара в любой точке A его поверхности перпендикулярна радиусу OA. Оказывается верна теорема.

Теорема.

Если в выпуклом теле есть такая точка O, что для каждой точки A его поверхности опорная плоскость в ней (хотя бы одна) перпендикулярна отрезку OA, то тело — шар, а точка O — его центр.

Доказали, что плоскость пересекает шар лишь по кругу (теорема 15.1). Заметим, что все круги подобны. И вот, оказывается, верна такая теорема.

Теорема.

Если внутри ограниченного выпуклого тела есть такая точка, что все проходящие через нее плоскости пересекают тело по подобным фигурам, то это тело — шар.

Мы доказали, что все проекции шара — равные круги. Оказывается верна теорема.

Теорема.

Если все проекции ограниченного выпуклого тела равны (и даже только подобны), то это тело — шар.

Между прочим, последние две теоремы недавно были доказаны одним молодым математиком. Может быть, и вам удастся доказать какую-нибудь интересную геометрическую теорему. Поэтому вспомните обращенные к молодежи и, значит, к вам тоже слова М. В. Ломоносова:

> Дерзайте ныне ободренны
> Раченьем вашим показать,
> Что может собственных Платонов
> И быстрых разумом Невтонов
> Российская земля рождать.

Задачи

Разбираемся в решении

20.1. Пусть F — выпуклая фигура. Докажите, что: а) отрезок, соединяющий внутренние точки F, содержит только внутренние ее точки; б) отрезок, соединяющий внутреннюю точку F с граничной точкой F, содержит, за исключением его конца, только внутренние точки F.

Решение.

Докажем утверждение а). Возьмем две внутренние точки A и B фигуры F. Соединим их отрезком AB. Заметим, что так как фигура F выпуклая, то весь отрезок AB лежит в фигуре F.

Для доказательства того, что отрезок AB содержит только внутренние точки фигуры F, возьмем любую точку X этого отрезка, кроме A и B (про них уже известно, что они внутренние), и докажем, что X — внутренняя точка фигуры F. Что же надо будет доказать? То, что найдется шар с центром в точке X, который целиком принадлежит F.

(В этом месте легко уйти в доказательство от противного и предположить: пусть такого шара нет, и... Попробуйте продвинуться на этом пути.)

Что же у нас есть для доказательства? Во-первых, мы взяли A — внутреннюю точку F. Это означает, что существует шар с центром в точке A, принадлежащий F. Обозначим его K_1, и пусть его радиус R_1. Во-вторых, мы взяли внутреннюю точку B. Значит, существует шар с центром в точке B, принадлежащий F. Обозначим его K_2, и пусть его радиус R_2. В-третьих, фигура F выпуклая. Поэтому, соединяя точки K_1 и K_2 всевозможными отрезками, мы заключаем, что все эти отрезки лежат в фигуре F. Объединение всех этих отрезков представляет собой фигуру F_1 — усеченный конус вместе с двумя частями шара (?). Если теперь взять шар с центром в точке X и радиусом, меньшим чем R_1 и R_2, то видно, что он расположится внутри построенной фигуры F_1 (рис. 262). Но $F_1 \subset F$ (?). Поэтому такой шар будет принадлежать фигуре F. Искомый шар найден, и доказательство закончено.

Аналогично решается задача б).

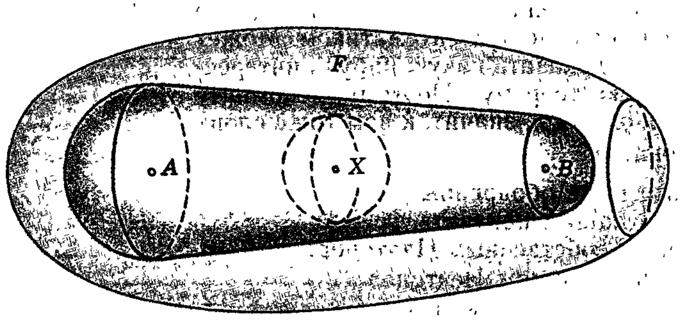


Рис. 262

Дополняем теорию

20.2. Дана правильная треугольная пирамида. Установите положение центра описанной около пирамиды сферы по отношению к самой пирамиде в зависимости от величины плоского угла при ее вершине. Обобщите эту задачу.

Представляем

20.3. 1. Приведите пример неплоской фигуры, которая: а) содержит только граничные точки; б) содержит только внутренние точки; в) имеет внутренние точки и граница которой является треугольником. 2. Приведите пример неограниченного тела.

20.4. При каком условии является телом: а) пересечение двух тел; б) объединение двух тел? Изменится ли полученное вами условие для выпуклых тел?

20.5. Верны ли такие утверждения: а) всякое сечение тела, проходящее через его внутренние точки, является замкнутой областью; б) всякая проекция тела является замкнутой областью? Для каждого утверждения составьте и проверьте обратное. Составьте аналогичные задачи для выпуклых тел.

20.6. Тело разделили плоскостью на две части. (При этом само сечение будем относить к каждой из полученных частей.) Будут ли полученные части телами? Будет ли верно обратное утверждение? Составьте аналогичные задачи для выпуклых тел.

20.7. Приведите пример тела, которое одной плоскостью делится на два тела меньшего диаметра. Когда это не получается? Можно ли привести такие примеры для выпуклых тел?

20.8. Приведите пример тела, отличного от шара, каждое сечение которого плоскостью, проходящей через некоторую прямую, является кругом или точкой.

Находим величину

20.9. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Какой по отношению к нему является точка X, такая, что: а) $|XB|=|XD|=|XB_1|=|XK|$, где точка K — середина ребра AB; б) $|XA|=|XA_1|$, $|XC|=|XD|$, $|XB_1|=2{,}5$, если ребро куба равно 2?

20.10. Пусть $PABC$ — правильный тетраэдр. Точка X такова, что $|XA|=|XC|$, $|XP|=|XB|$, $|XA|=\sqrt{3}|XP|$. Установите положение точки X относительно тетраэдра.

20.11. Пусть $PABCD$ — правильная четырехугольная пирамида, каждое ребро которой равно 3. Точка X такова, что $|XP|=|XC|$, $|XA|=2$. Как расположена точка X относительно пирамиды?

Исследуем

20.12. Даны ограниченное тело и точка вне его. а) Всегда ли существует плоскость, опорная к данному телу и проходящая через данную точку? А если существует, то сколько таких плоскостей? б) Ответьте на те же вопросы для выпуклых тел. в) Вместо точки возьмите прямую, не имеющую с телом общих точек. Ответьте на аналогичные вопросы.

20.13. Пусть дан куб. Некоторая точка удалена от каждой его вершины на расстояние, меньшее длины его ребра. Лежит ли она в кубе? Можно ли, сохраняя ответ однозначным, уменьшить число вершин в условии задачи?

20.14. Дан прямоугольный тетраэдр. Установите по отношению к нему положение точки, равноудаленной: а) от всех его вершин; б) от всех его ребер.

20.15. Дано тело F диаметром d. Точка X удалена от каждой его точки на расстояние, меньшее чем d. Можно ли установить положение точки X относительно F?

20.16. Существует ли ограниченное тело, у которого: а) каждое сечение невыпукло и каждая проекция невыпукла; б) только одно сечение выпукло и только одна проекция выпукла; в) каждая проекция выпукла, а каждое сечение невыпукло; г) каждое сечение выпукло, а каждая проекция невыпукла?

Задачи к главе IV

Представляем

IV.1 Сможете ли вы расположить пять равных цилиндров так, чтобы каждый имел единственную общую точку с каждым из остальных? а шесть таких же цилиндров?

Планируем

IV.2. В данную сферу вписаны: а) цилиндр; б) конус; в) усеченный конус. Размеры этих тел известны. Как найти расстояния от центра сферы до оснований и боковых поверхностей этих тел?

IV.3. Четыре равных шара известного радиуса расположены так, что каждый касается трех остальных. Как найти размеры описанных около этого сооружения: а) шара; б) цилиндра; в) конуса?

IV.4. В конус вписан шар. Размеры конуса известны. Внутри конуса находятся шары. Каждый из них касается основания конуса, его боковой поверхности и вписанного шара. Кроме того, каждые два таких соседних шара касаются между собой. Как подсчитать число таких шаров?

Находим величину

IV.5. Конус с углом φ в осевом сечении закатили в двугранный угол величиной φ_1 так, что его вершина находится на его ребре, а грани двугранного угла лежат в опорных плоскостях к конусу. Какой угол образуют между собой образующие конуса, лежащие в гранях двугранного угла?

IV.6. Основание конуса радиусом 1 и высотой 2 находится на плоскости α. На расстоянии 1 от конуса в этой плоскости укреплен вертикально штатив, на котором на расстоянии 4 от плоскости находится точечный источник света. Вычислите площадь тени, отбрасываемой конусом на плоскость. Можно ли увеличить или уменьшить площадь тени до нужной нам величины, перемещая по плоскости штатив и источник света на нем?

IV.7. Три шара лежат на плоскости, и каждые два из них касаются между собой. Назовем точки касания A, B, C: а) $|AB|=2$, $|AC|=3$, $|BC|=4$; б) $|AB|=4$, $|AC|=5$, $|BC|=6$. В каждом из этих случаев установите, какой из этих шаров наибольший; какой наименьший.

IV.8. Три шара одинакового радиуса лежат на плоскости, и каждые два из них касаются. Четвертый шар того же радиуса кладется в ямку между ними. Какова высота полученного сооружения? (Разумеется, если оно не раскатилось.) Обобщите эту задачу.

IV.9. Два шара радиусом R и два шара радиусом $r(r<R)$ лежат на плоскости. При этом каждый из них касается трех остальных. Вычислите $R:r$.

IV.10. В полушар радиусом R вписаны шары радиусом r так, что каждый из них касается основания полушара и двух других шаров. Сколько шаров находится внутри данного полушара?

IV.11. Уместятся ли: а) три шара радиусом 1 в шаре радиусом 3; б) три шара радиусом 1 в шаре радиусом 2; в) четыре шара радиусом 1 в шаре радиусом 3?

IV.12. Три цилиндра расположены так, что каждые два имеют единственную общую точку. Эта общая точка находится внутри образующей каждого из цилиндров. Оси цилиндров попарно перпендикулярны. Радиус каждого цилиндра равен R. Найдите радиус шара, который пройдет через зазор, образованный цилиндрами.

IV.13. Шар касается плоскости. На этой плоскости находится основание конуса. Шар и конус имеют единственную общую точку внутри образующей конуса. а) Докажите, что вершина конуса, центр шара, точка касания шара и плоскости, общая точка шара и конуса лежат в одной плоскости. б) Пусть размеры шара и конуса известны. Как найти, на каком расстоянии от плоскости находится общая точка шара и конуса.

IV.14. Кулек имеет форму конуса. Его образующая равна диаметру основания и равна 4. Сколько шаров радиусом 1 вы сможете в нем разместить?

IV.15. Конус известных размеров стоит основанием на плоскости. Этой плоскости и боковой поверхности данного конуса касаются шары известного радиуса. Кроме того, каждые два соседних шара касаются между собой. Как подсчитать число таких шаров?

IV.16. Плоскость α является опорной к двум конусам и проходит через их различные образующие. Конусы имеют общую вершину и образующую, лежащую на поверхности каждого из них. Угол в осевом сечении каждого равен φ. Какой угол образует с плоскостью α: а) их общая образующая; б) общая опорная прямая их оснований; в) их общая опорная плоскость, проходящая через их общую образующую; г) их общая опорная плоскость, проходящая через образующую каждого из них и отличная от α?

IV.17. Радиус основания цилиндра равен 1, его высота равна 2. Основание полушара совпадает с основанием цилиндра, и других общих точек они не имеют. Для полученного тела вычислите: а) диаметр; б) ширину; в) радиус наименьшего шара, его содержащего; г) радиус наибольшего шара, в нем умещающегося. Ответьте на те же вопросы, если радиус полушара равен 2, а его центр совпадает с центром основания цилиндра.

Ищем границы

IV.18. В шаре радиусом R находится цилиндр с наибольшим по площади осевым сечением. Каковы размеры этого цилиндра?

IV.19. Рассмотрим всевозможные цилиндры с диаметром (т. е. диагональю осевого сечения), равным 1. Вычислите радиус наибольшего шара, содержащегося в таком цилиндре, и радиус наименьшего шара, содержащего такой цилиндр.

IV.20. В цилиндре, у которого высота равна диаметру основания и равна d, надо разместить два одинаковых шара. Каков их наибольший радиус? А если шаров три?

IV.21. Цилиндр радиусом R и высотой H лежит на плоскости своим основанием. Его хотят накрыть полусферой. Каков ее наименьший радиус? А если цилиндр лежит на плоскости своей образующей? Решите такую же задачу для конуса.

Доказываем

IV.22. Два равных конуса имеют общую вершину. Их боковые поверхности пересекаются по двум образующим. Докажите, что плоскость, проходящая через эти образующие, перпендикулярна плоскости, которая проходит через их оси.

IV.23. Докажите, что окружность является линией пересечения (если такая существует): а) боковых поверхностей конуса и цилиндра, оси которых лежат на одной прямой; б) боковых поверхностей двух конусов, оси которых лежат на одной прямой; в) боковой поверхности конуса и сферы, центр которой лежит на прямой, проходящей через ось конуса; г) боковой поверхности цилиндра и сферы, центр которой лежит на прямой, проходящей через ось цилиндра. (В случаях в) и г) возможны две окружности.)

IV.24. Дано ограниченное выпуклое тело. Докажите, что существует наименьший шар, в котором оно содержится, и наибольший шар, который содержится в нем. Единственны ли такие шары? Как изменятся полученные вами результаты, если тело не будет выпукло?

Исследуем

IV.25. Дан наклонный цилиндр с круговым основанием. Имеет ли он круговые сечения, не параллельные основанию? Ответьте на тот же вопрос для наклонного кругового конуса.

IV.26. На одной плоскости лежат три полушара, не имеющие общих точек. Известны их радиусы и расстояния между ними. Большие круги этих полушаров находятся в данной плоскости. К ним проводится общая опорная плоскость, не совпадающая с данной. Можете ли вы найти расстояния между точками касания этой плоскости с полушарами? а угол между этой плоскостью и данной?

IV.27. Два равных конуса имеют параллельные оси. Имеют ли они общую опорную плоскость, проходящую через образующие их поверхностей?

Прикладная геометрия

IV.28. а) На реальной сфере нарисована окружность. Как вычислить ее радиус? б) Как вычислить радиус реальной сферы?

IV.29. На реальной сфере известного радиуса с помощью циркуля надо нарисовать: а) большую окружность, проходящую через данную точку; б) большую окружность, проходящую через две данные точки; в) окружность данного радиуса, проходящую через данную точку; г) окружность данного радиуса, проходящую через две данные точки. Как вы это сделаете? Как на реальной сфере с помощью циркуля отметить точку, диаметрально противоположную данной точке?

IV.30. Для определения кривизны сферической линзы нужно знать ее радиус. Предложите схему прибора для его измерения.

IV.31. Крышка стола имеет вид тонкого цилиндра. У этого стола три ножки. Каждая из них имеет вид узкого цилиндра. Этот стол надо пронести через дверной проем. Какие замеры для этого нужно сделать? А если у стола четыре ножки?

IV.32. Радуга имеет форму дуги окружности. Из каких геометрических соображений это следует?

Участвуем в олимпиаде

IV.33. Дано тело F. Для каждой точки F нашли наименьшее расстояние до границы и наибольшее расстояние до границы. Среди всех наименьших расстояний выбрали наибольшее, а среди всех наибольших расстояний — наименьшее. Обозначим первое из них d_1, а второе из них — d_2. Сможете ли вы привести пример такой фигуры, что: а) $d_1 < d_2$; б) $d_1 = d_2$; в) $d_1 > d_2$?

Итоги главы IV

В своей основной части глава IV, как и глава III, описательна и наглядна: ведется рассказ о сфере и шаре, цилиндре и конусе; доказываются достаточно простые теоремы о сечении шара, цилиндра и конуса плоскостями (пп. 15.2, 18.1, 19.2), причем у цилиндра и конуса речь идет лишь о плоскостях, параллельных их основаниям. На наглядном уровне говорится и о симметрии этих тел. Но дополнительный материал в этой главе весьма обширен и разнообразен. По существу, именно с этой главы и начинается углубленный курс геометрии.

Отметим важнейшее из этого материала, расширяющего или углубляющего основное содержание.

1) Классическая теорема о касательной плоскости к сфере (п. 15.3) ведет к рассказу о важных понятиях современной математики — опорной плоскости (§ 16) и выпуклых фигурах (§ 17). В § 16 доказана теорема об опорных плоскостях к ограниченной фигуре в концах ее диаметра, являющаяся современным обобщением теоремы о касательной плоскости к сфере.

2) Доказаны (§ 18 и § 19) метрические (фокальные) свойства плоских сечений цилиндра и конуса вращения и рассказано о различных подходах к теории конических сечений.

3) Рассказано (§ 19) о центральном проектировании и доказана теорема Дезарга.

4) В § 20 «Тела» введены понятия внутренних и граничных точек фигуры. Эти понятия применяются во всех разделах современной математики и лежат в основе того ее раздела, который называют «Общая топология». О топологии будет сказано в главе X «Современная геометрия». Здесь же лишь скажем, что топологическими называют такие свойства фигур, которые сохраняются при взаимно однозначных и взаимно непрерывных деформациях фигур, а общая топология изучает топологические свойства фигур. Изучение тел и их поверхностей в главе IV лишь началось. Оно будет продолжено в 11-м классе (главы V—VII).

Поступаем в вуз

Для тех, кто уже думает о вступительных экзаменах в вуз, мы помещаем в учебнике некоторые геометрические задачи, предлагавшиеся на вступительных экзаменах в разных вузах России.

1. Четыре прямые расположены в пространстве так, что каждые две из них пересекаются и никакие три не имеют общей точки. Докажите, что эти прямые лежат в одной плоскости.

2. Прямоугольные проекции четырехугольника на две взаимно перпендикулярные плоскости являются квадратами со стороной 2. Одна из его сторон равна $\sqrt{5}$. Вычислите его периметр.

Ответ: $2(\sqrt{5}+\sqrt{7})$.

3. Через гипотенузу прямоугольного треугольника проведена плоскость, наклоненная к катетам треугольника под углами α и β соответственно. Найдите угол между этой плоскостью и плоскостью треугольника.

Ответ: $\arcsin\sqrt{\sin^2\alpha+\sin^2\beta}$.

4. Катеты AB и AC прямоугольного треугольника ABC расположены соответственно в гранях P и Q острого двугранного угла величины φ. Катет AB образует с ребром двугранного угла острый угол α. Определите угол между этим ребром и катетом AC.

Ответ: $\operatorname{arcctg}(\operatorname{tg}\alpha\cdot\cos\varphi)$.

5. Найдите угол между двумя скрещивающимися прямыми a и b, если расстояние между точками A прямой a и B прямой b, равноотстоящими от основания C на прямой a и D на прямой b общего перпендикуляра к этим прямым, равно $2p$, а $DC=AC+BD=p$.

Ответ: $\frac{2\pi}{3}$.

6. На прямой p в пространстве последовательно расположены точки A, B и C, такие, что $AB=27$ и $BC=18$. Найдите расстояние между прямыми p и q, если расстояния от точек A, B и C до прямой q равны 17, 10 и 8 соответственно.

Ответ: 8.

7. Три хорды шара, исходящие из одной его точки на его поверхности, равны a, углы между хордами равны 60°.

Ответ: $\frac{a\sqrt{6}}{4}$.

8. Сфера касается ребер AS, BS, BC и AC тетраэдра $SABC$ в точках K, L, M и N соответственно. Найдите длину отрезка KL, если $MN=7$, $NK=5$, $LN=2\sqrt{29}$ и $KL=LM$.

Ответ: 9.

9. Две касающиеся сферы вписаны в двугранный угол величиной $\frac{\pi}{3}$. Пусть A — точка касания первой сферы с первой гранью, B — точка касания второй сферы со второй гранью. Найдите отношение $AK:KL$, если K и L — точки пересечения отрезка AB с первой и второй сферами соответственно.

Ответ: 3:1.

10. Два равных шара касаются друг друга и граней двугранного угла 2α. Пусть A — точка касания одного шара с одной гранью угла, а B — точка касания другого шара с другой гранью угла. В каком отношении отрезок AB делится сферами?

Ответ: $1:\mathrm{tg}^2\alpha:1$.

11. Каждый из двугранных углов трехгранного угла равен α. Как удалена от его вершины точка, которая находится внутри угла на расстоянии a от каждого угла?

Ответ: $\left(a\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\right):\left(\sqrt{3}\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}-1\right)$.

12. В цилиндре высота равна диаметру основания. Под углом α к плоскости основания проведена прямая, соединяющая некоторую точку окружности нижнего основания с некоторой точкой окружности верхнего основания. Найдите расстояние между этой прямой и осью цилиндра, если радиус основания равен R.

Ответ: $\sqrt{\frac{-\cos 2\alpha}{\sin\alpha}}\,R$.

13. Внутри цилиндра, высота которого равна $3r$, лежат три равных шара радиуса r так, что каждый шар касается двух других шаров и боковой поверх-

ности цилиндра, причем два шара касаются нижнего основания цилиндра, а третий шар касается верхнего основания цилиндра. Найдите радиус основания цилиндра.

Ответ: $\frac{3+2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}r$.

14. На плоскость положены два цилиндра, радиусы которых r; цилиндры примыкают друг к другу по образующей. На них положены два других касающихся по образующей цилиндра с радиусами R и осями, перпендикулярными осям первых двух цилиндров. Найдите радиус шара, касающегося всех четырех цилиндров.

Ответ: $\frac{(R+r)^2}{2(R+r+\sqrt{R^2+6Rr+r^2})}$.

15. В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит правильный треугольник ABC со стороной 4. Прямые AB_1 и CA_1 перпендикулярны. Найдите высоту призмы.

Ответ: $2\sqrt{2}$.

16. Непересекающиеся диагонали двух смежных боковых граней прямоугольного параллелепипеда наклонены к плоскости основания под углами α и β. Найдите угол между этими диагоналями.

Ответ: $\arccos(\sin\alpha\cdot\sin\beta)$.

17. Основанием $ABCD$ прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ служит ромб со стороной a и острым углом φ, а высота призмы равна h. Найдите расстояние от вершины B_1 до диагонали A_1D.

Ответ: $\frac{a\sqrt{h^2+a^2\sin^2\varphi}}{\sqrt{h^2+a^2}}$.

18. В прямом круговом конусе с вершиной S угол между образующими SA и SB равен α, а угол между их проекциями на плоскость основания равен β. Вычислите угол между биссектрисами углов OSA и OSB, где точка O — центр основания конуса.

Ответ: $\arccos\left(\cos^2\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\beta}{2}\sqrt{\frac{\cos\alpha-\cos\beta}{2}}\right)$.

19. Угол между образующей конуса и его высотой равен α. Найдите угол φ между двумя образующими этого конуса, если известно, что плоскости, касающиеся конуса по этим образующим, взаимно перпендикулярны.

Ответ: $\sin\frac{\varphi}{2}=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{2}}$.

20. На плоскости лежат три равных конуса с общей вершиной. Каждый из них касается двух рядом лежащих. Найдите угол при вершине осевого сечения одного из этих конусов.

Ответ: $2\,\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{3}}{2}$.

21. Все грани тетраэдра — равные равнобедренные треугольники. Высота тетраэдра совпадает с высотой одной из ее боковых граней. Найдите высоту тетраэдра, если расстояние между наибольшими боковыми ребрами равно 1.

Ответ: $\sqrt{2}$.

22. В тетраэдре $PABC$ суммы трех плоских углов при каждой вершине A, B, C равны π. Найдите расстояние между скрещивающимися ребрами PA и BC, если $BC=4$, $AC=5$, $AB=6$.

Ответ: $\sqrt{\frac{61}{2}}$.

23. Основание тетраэдра $SABC$ — равносторонний треугольник ABC, длина стороны которого равна $4\sqrt{2}$. Боковое ребро SC перпендикулярно к плоскости основания и имеет длину 2. Найдите величину угла и расстояние между скрещивающимися прямыми, одна из которых проходит через точку S и середину ребра BC, а другая проходит через точку C и середину ребра AB.

Ответ: $\frac{\pi}{4}$; $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

24. Докажите, что треугольная пирамида является правильной, если: а) шар касается трех сторон основания в их серединах, а середины боковых ребер лежат на поверхности шара; б) шар касается всех боковых граней пирамиды в точках пересечения их медиан; в) шар касается боковых граней треугольной пирамиды в точках пересечения их высот, а сумма плоских углов при каждой вершине одна и та же; г) шар касается всех боковых граней в центрах описанных около них окружностей и все плоские углы при вершине равны; д) шар касается всех боковых граней в центрах вписанных в них окружностей. (Каждая из задач а) — д) предлагалась на вступительном экзамене как часть некоторой другой задачи.)

25. Боковые ребра тетраэдра взаимно перпендикулярны. Высота тетраэдра равна h. Найдите радиус сферы, описанной около тетраэдра.

Ответ: $1{,}5h$.

К учителю

Мы осуществляем очередное переработанное издание нашего учебника для углубленного изучения геометрии в 10-м и 11-м классах двумя книгами, каждая из которых обладает известной завершенностью и универсальностью.

Поскольку десятые классы могут комплектоваться из учащихся, изучавших геометрию в девятилетней школе по разным учебникам, то этот ученик написан так, что он не зависит от различий в учебниках девятилетней школы и неважно, по какому учебнику изучалась геометрия: начать работу по этому учебнику можно в любом десятом классе. Этот класс может быть и классом обычной общеобразовательной школы, поскольку, конечно, учебник содержит курс геометрии такой школы и можно ограничиться изучением лишь этого материала.

Но, конечно, главным образом учебник ориентирован на классы с углубленным изучением математики и он является продолжением нашего учебника «Геометрия, 8—9» для таких классов. Естественно, он предназначен и для тех классов, в которых углубленное изучение математики начинается с 10-го класса.

В книгах «Геометрия, 10» и «Геометрия, 11» мы сохранили последовательность и в основном содержание десяти глав всего углубленного курса геометрии, так что для учителей, работавших уже по этому учебнику, новое его издание окажется знакомым. В «Геометрии, 10» четыре главы: «Основания стереометрии», «Перпендикулярность и параллельность прямых и плоскостей», «Расстояния и углы», «Пространственные фигуры и тела». Каждая глава начинается введением, в котором формулируются задачи соответствующей главы, а завершаются главы подведением итогов и выделением основных результатов.

В этом издании переработаны задачи. Совокупность их осталась той же (есть только несколько новых), но они иначе структурированы. Смысловой единицей в этом варианте полагается весь параграф, а не его пункт, что определяло структуру задач в предыдущих изданиях. (Желающие могут придерживаться и «старой» точки зрения — для этого в номере задачи указано в скобках, к какому пункту параграфа она отнесена.)

Новая структура отражает связи системы задач учебника с реалиями, оказывающими на нее существенное влияние. Прежде всего в задачах должны быть представлены все три составляющие самой геометрии: логика, наглядное воображение и практика.

Логика представлена теоретическим разделом курса. В задачах она подчеркнута такими рубриками, как «Дополняем теорию», «Доказываем». Внимание к наглядному воображению акцентировано такими рубриками: «Смотрим», «Рисуем», «Представляем». И наконец, практической составляющей отвечают рубрики «Прикладная геометрия» и частично «Переключаемся».

(Сразу же надо сказать, что в чистом виде представить каждую из этих составляющих трудно, а скорее всего, и невозможно. Речь идет об акцентах в преподавании.)

Следующий важный момент, отраженный в задачах,— дифференциация учебной и исследовательской деятельности ученика. Исследовательские задачи выделены рубрикой «Исследуем». Отличаются они от чисто учебных тем, что нет исходной ясности либо в условии задачи, либо в ее заключении. Не исключены и противоречия. Часто встречается вопрос: «Можете ли вы?» Если ученик не может ответить на вопрос задачи, то каковы причины? Не исключено и то, что ответ невозможен. Ничего страшного: нормальная исследовательская ситуация — оказывается, что-то сделать невозможно.

Учебная деятельность достаточно многогранна. Задачи этого вида деятельности выделены рубриками «Работаем с формулой», «Планируем», «Находим величину», «Ищем границы» (в последнюю рубрику попало несколько задач комбинаторной геометрии). Основной учебной задачей можно считать задачу на получение и осмысление функциональной зависимости, связанной с геометрической фигурой, в частности — вычисление разных величин. Практика показывает доступность и полезность этого типа задач связями с другими разделами элементарной математики.

Рубрика «Работаем с формулой» представлена в основном задачами на применение формул для вычисления объемов и площадей. Рубрика «Планируем» немного смягчает роль чисто вычислительных задач, которые преобладают в современной школьной геометрии. Такие вычисления бывают либо тривиальны, либо громоздки, ничего по существу не добавляя к собственно геометрическим умениям. Поэтому часто вполне достаточен только хорошо обоснованный план нахождения той или иной величины.

Для тех, кого интересуют более содержательные и трудные задачи, выделена рубрика «Участвуем в олимпиаде». Пока только намечена рубрика «Рассуждаем» для тех задач, результат в которых получается одной только логикой.

Рубрика «Разбираемся в решении» предназначена ученику в первую очередь для того, чтобы показать ему некоторые движения мысли, приводящие к получению нужного результата. В тех местах приведенных решений, где стоит знак вопроса (?), ему предлагается самому довести до конца предложенную идею или выкладку.

Задачи раздела «Дополняем теорию» играют ту же роль, что и задачи раздела «Основные задачи» в предыдущих изданиях. На них можно ссылаться как на теоремы при решении других задач.

Можно надеяться, что каждый учитель выберет в этой структуре те разделы, которые более всего соответствуют его личной установке в преподавании геометрии.

Ответы к задачам не приводятся, так как большинство из них приведено в пособиях для учителя.

Предметный указатель

Учебное издание

Александров Александр Данилович
Вернер Алексей Леонидович
Рыжик Валерий Идельевич

ГЕОМЕТРИЯ

Учебник для 10 класса с углубленным изучением математики

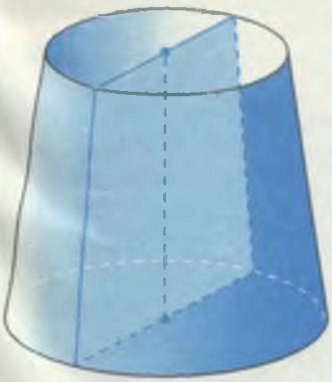
Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*
Редактор *Н. Б. Грызлова*
Младший редактор *Н. В. Сидельковская*
Художники *Е. А. Стребкова, В. А. Сайчук, О. М. Шмелев*
Художественный редактор *Е. Р. Дашук*
Технические редакторы *Е. Н. Зелянина, Л. М. Абрамова*
Корректоры *И. Б. Окунева, И. Н. Панкова*

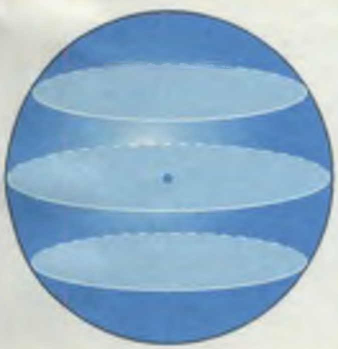
Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. № 010001 от 10.10.96. Сдано в набор 16.10.98. Подписано к печати 26.07.99. Формат $70\times90^1/_{16}$. Бумага офсетная № 1. Гарнитура Литературная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 17,55+0,29 форзац. Усл. кр.-отт. 36,34. Уч.-изд. л. 14,91+0,53 форзац. Тираж 10 000 экз. Заказ № 7909.

Государственное унитарное предприятие ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Государственного комитета Российской Федерации по печати. 127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

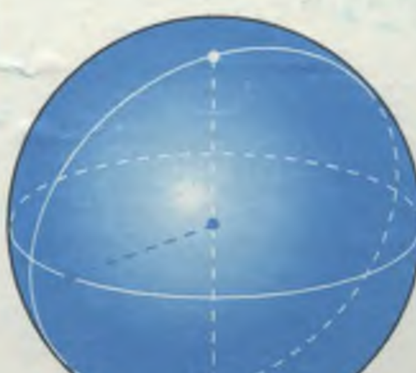
Государственное унитарное предприятие Смоленский полиграфический комбинат Государственного комитета Российской Федерации по печати. 214020, Смоленск, ул. Смольянинова, 1.

Сеч
симм
пара





ния
етрия
оксы



Учебно-методический комплект для углубленного изучения геометрии в 10-11 классах включает:

А.Д.Александров, А.Л.Вернер, В.И.Рыжик

ГЕОМЕТРИЯ 10
ГЕОМЕТРИЯ 11
учебники

В.И.Рыжик

ДИДАКТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ГЕОМЕТРИИ
для 10 класса
для 11 класса

В.М.Паповский, Н.М.Пульцин

УГЛУБЛЕННОЕ ИЗУЧЕНИЕ ГЕОМЕТРИИ
в 10 классе
в 11 классе

Методические рекомендации для учителя

ISBN 5-09-008530-7

9 785090 085304

•Просвещение•